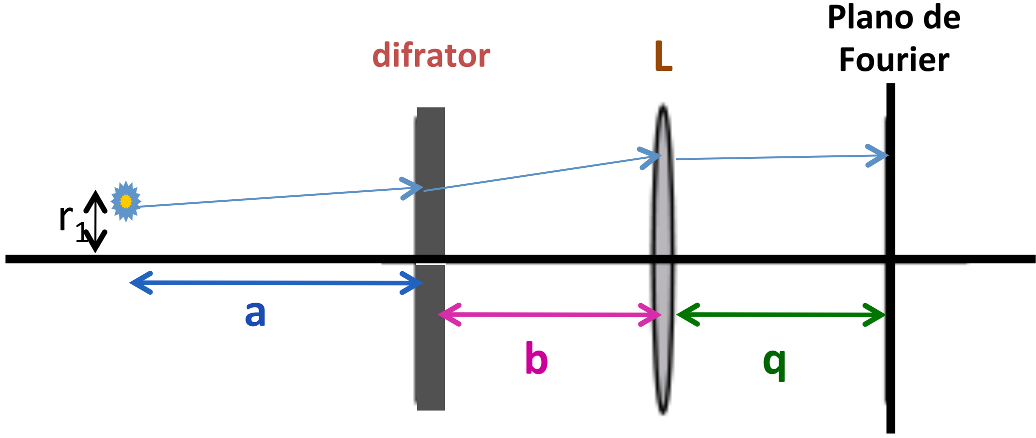
Caso geral: ótica de Fourier

- A fonte pontual está numa distância qualquer da lente:
  - ela dista **a** do difrator e está $\mathbf{r_1}$ acima do eixo de simetria da lente
- A matriz de transferência desse sistema:

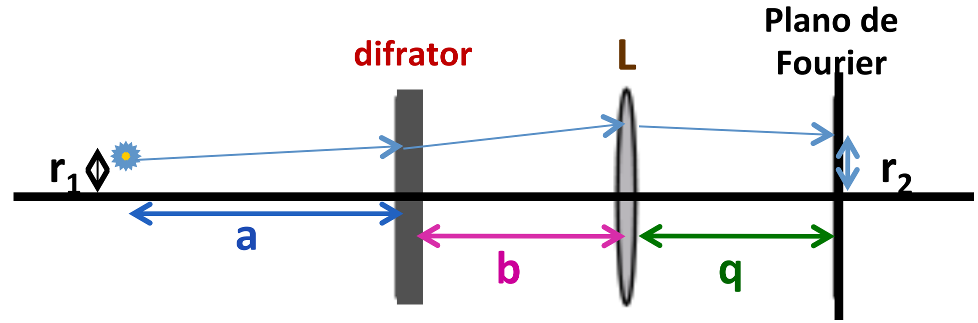
  É a matriz do espaço livre "**a**" da fonte ao difrator X a matriz do difrator X a matriz do espaço livre "**b**" do difrator à lente X a matriz da lente X a matriz do espaço livre "**q**" da lente ao plano da transformada.



Atividade proposta

- Vocês terão à disposição uma tela muito fina.
- Usando os conceitos de difração por múltiplas fendas, e as informações do slide anterior, determine o número de fios por cm da tela, a partir da análise do tamanho da figura no plano de Fourier .
- Use para tanto feixe paralelo.

O resultado:



- Dessa matriz que vocês estão convidados a calcular, (vejam a seguir como), podemos obter algumas resultados interessantes:
  - as expressões para $\mathbf{r_2}$ e $\boldsymbol{\varphi_2}$:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

- Note que o padrão de difração (que é a transformada de Fourier) deve depender do espaçamento **d** da rede (ou de uma fenda), mas não da direção dos raios que são emitidos pela fonte, portanto ele deve ser independente de $\boldsymbol{\varphi_1}$.

Talvez seja interessante mencionar que somente quando **b=q=f** é que se tem a transformada de Fourier exata. Nos outros casos há uma fase que não é detectada quando se trata a intensidade. A fase pode ser vista se no caso da matriz deduzida no slide 11 for colocada uma distância **d** diferente de **f** em um dos lados. Surge um termo exponencial quadrático com expoente que se anula somente quando **d=f**.

O cálculo da matriz de transferência do slide 2

- Primeira matriz do espaço livre **a**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \rightarrow r_2 = r_1 + a\varphi_1 \quad e \quad \varphi_2 = \varphi_1$$

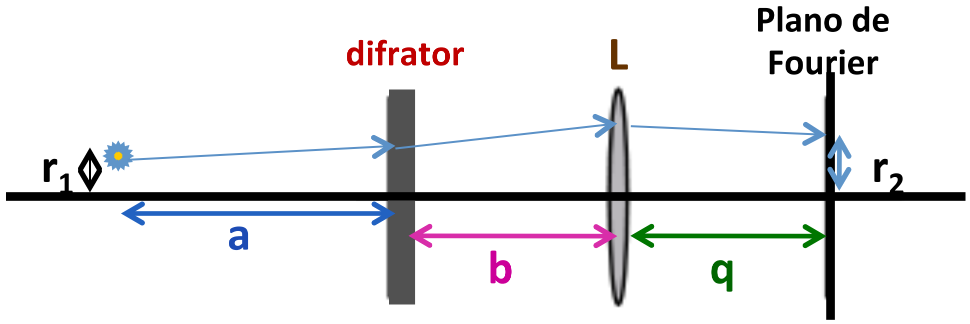
  – esses são $\mathbf{r_1}$ e $\boldsymbol{\phi_1}$ para o elemento difrator

- No elemento difrator **D**:

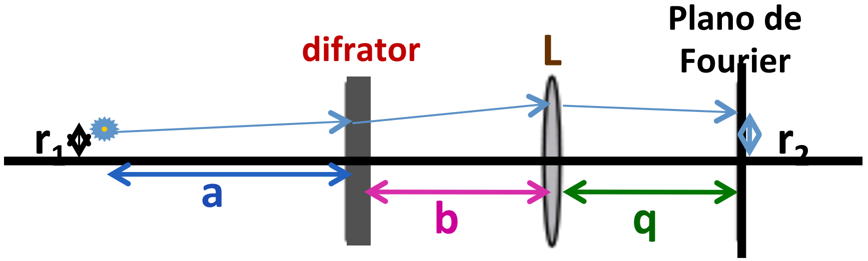
$$r_2 = r_1 + a\varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m\lambda}{d}$$

O raio sai no mesmo ponto que entrou ($\mathbf{r_2}$=$\mathbf{r_2}$ acima) e o ângulo é alterado pq o elemento difrata



O cálculo da matriz de transferência



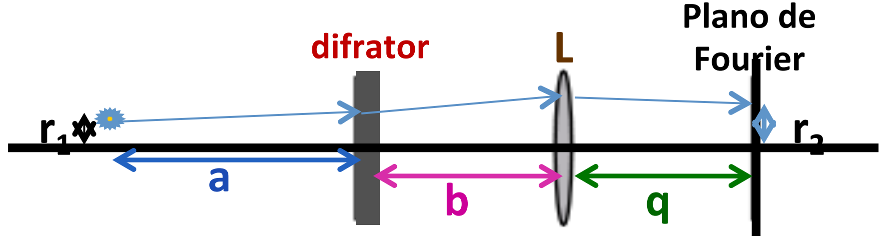
- A matriz do espaço livre **b**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

- A matriz da lente **L**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a}{f}\varphi_1 - \dfrac{b}{f}\varphi_1 - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

O cálculo da matriz de transferência

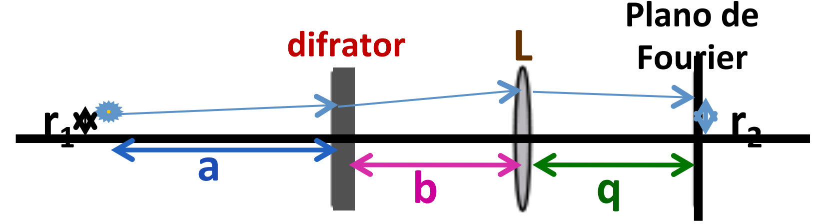


- A matriz do espaço livre **q**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a\varphi_1}{f} - \dfrac{b\varphi_1}{f} - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} - \dfrac{r_1 q}{f} - a\dfrac{q\varphi_1}{f} - b\dfrac{q\varphi_1}{f} - \dfrac{bq}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 q + \dfrac{m\lambda}{d} q \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a\varphi_1}{f} - \dfrac{b\varphi_1}{f} - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

O cálculo da matriz de transferência



- Agrupando os termos e continuando o cálculo da matriz do espaço livre **q**:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

  – o padrão de difração (que é a transformada de Fourier) deve depender do período **d** da rede, ou do elemento difrator, mas não da direção dos raios que saem da fonte (φ_1 =0) .

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b} \Rightarrow q = f$$

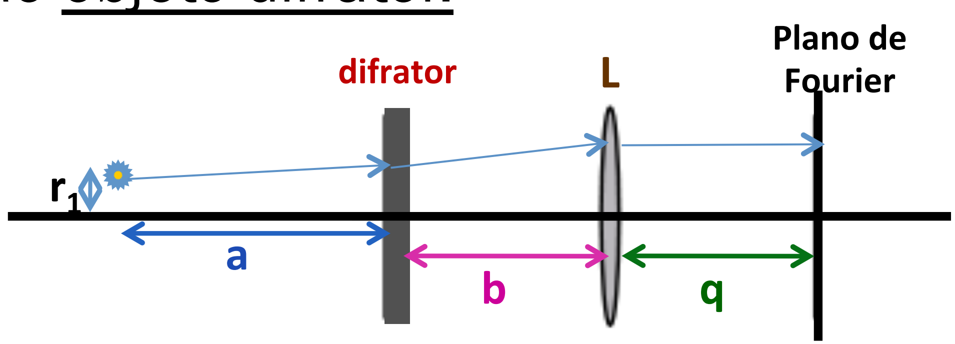
A posição do plano da transformada:

- Portanto, se o padrão de difração é independente de $\boldsymbol{\phi_1}$, o coeficiente de $\boldsymbol{\phi_1}$ na equação de $\mathbf{r_2}$ deve ser zero:

$$a + b - (a+b)\frac{q}{f} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$$

  - Lembrando **q** é a posição do plano da transformada, e **a+b** é a posição da fonte em relação à lente, vê-se que a transformada de Fourier é formada no plano imagem conjugado à <u>fonte</u> e <u>não</u> ao <u>objeto difrator.</u>

A T. Fourier é formada no plano imagem conjugado à fonte que dista a+b da lente

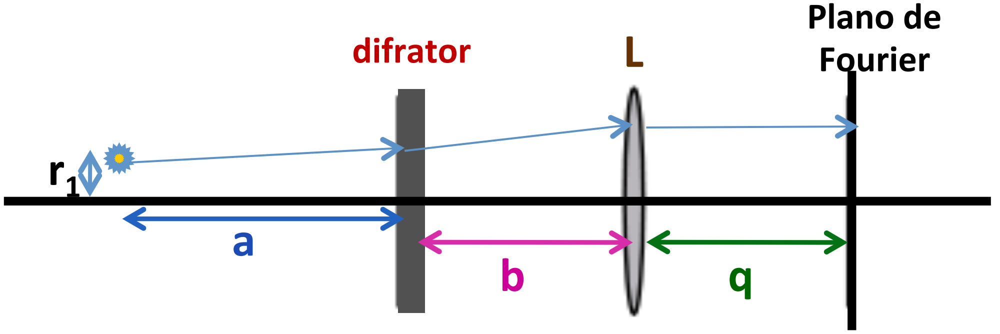


Caso especial:

- Se a fonte está no infinito (objeto iluminado por onda plana):

$$a \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b} \Rightarrow q = f$$

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte quanto do objeto. Caso a fonte esteja no infinito, o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e INDEPENDE da posição do objeto.



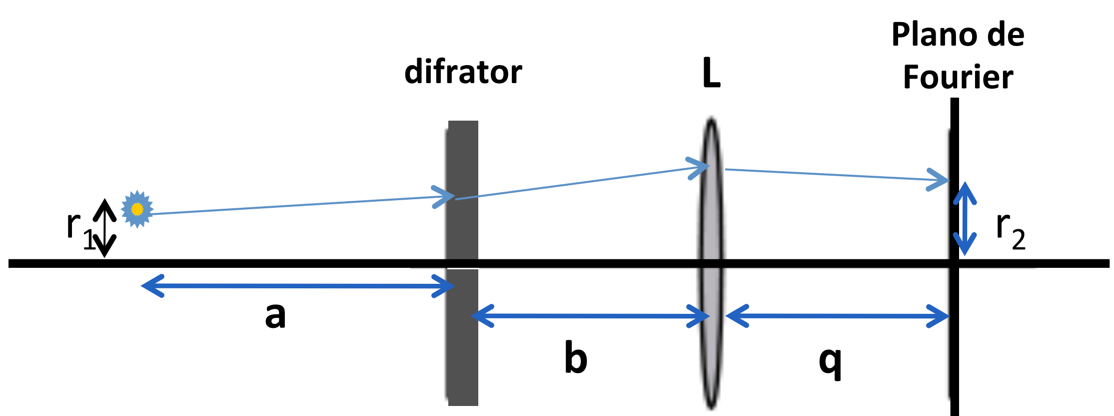
O espaçamento da figura de difração:

- As diversas ordens da figura de difração vão aparecer nas posições dadas por $\mathbf{r_2}$:

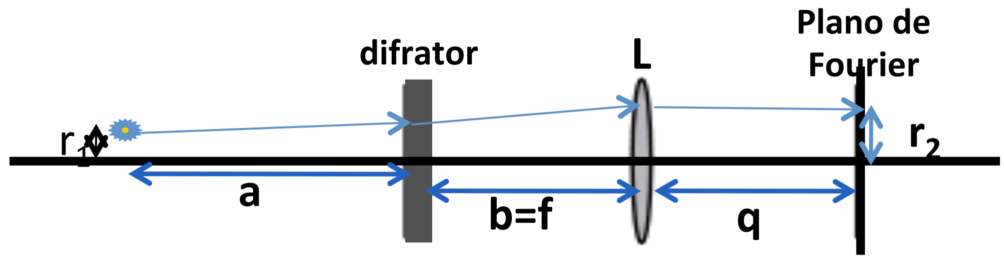
$$r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d} \quad se \quad r_1 = 0$$

- que substituindo a expressão para **f**, dá:

$$r_2 = \left(\frac{qa}{a+b}\right)\frac{m\lambda}{d}$$



Casos particulares



- Vamos estudar alguns casos particulares para a posição do difrator e ver o que acontece com o espaçamento $\mathbf{r_2}$:
  - **Caso 1**: se **b=f** (difrator no foco da lente)

$$r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d} = \left(b + q - \frac{bq}{b}\right)\frac{m\lambda}{d} \Rightarrow r_2 = b\frac{m\lambda}{d} = f\frac{m\lambda}{d}$$

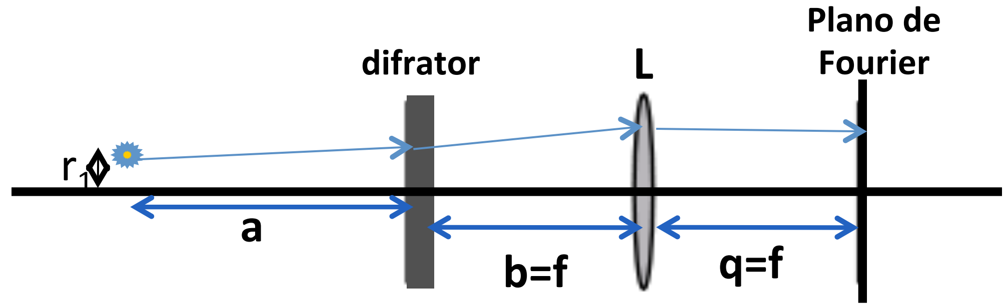
  - Ou seja a escala da figura da transformada de Fourier independe de **a**, e, portanto não muda,
  - mas como a expressão

é sempre válida, variando **a**

a posição, **q**, do plano de Fourier muda.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$$

Casos particulares



- Se além de **b=f**: quisermos que a transformada se forme no foco imagem, **q=f**, a expressão $\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$ fica: $$\frac{1}{f} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a+f}$$
- Então para ela ser uma igualdade, [1/(a+f)]=0, ou seja **a=∞**: os raios de incidência são paralelas, fonte no **∞**.
- E nesse caso:

$$r_2 = fm\frac{\lambda}{d}$$

Nesse caso: fonte no infinito e difrator no foco da lente convergente, a transformada de Fourier que se forma no foco imagem é exata. Nos outros casos vão aparecer fases, mas a intensidade não muda.

O que acontece:

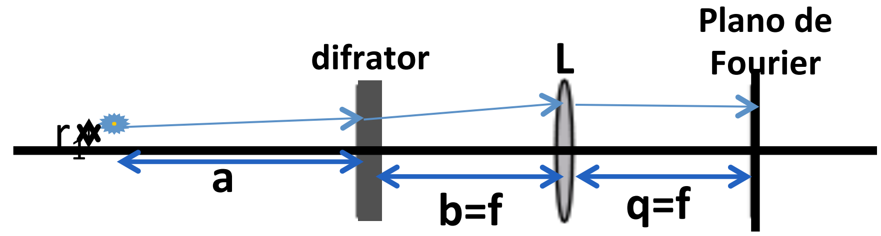
se a posição da imagem não é no foco, vai aparecer um outro termo na fase

$$M = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\varphi_1 \\ -\frac{r_1}{f} \end{pmatrix}$$

o outro termo que aparece em φ_2, a gente não deteta porque estamos medindo intensidade.

Objetivos desta atividade



- Vamos então verificar:
  - o caso em que a fonte está no infinito: incidência paralela e o difrator no foco, **b=q=f**, medir $\mathbf{r_2}$ e comparar com a previsão:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

posição do plano de Fourier, q

$$r_2 = f\,\frac{m\lambda}{d}$$

'tamanho' da transformada c/ objeto no foco

Esta é a figura com a da transformada de Fourier no plano focal da lente (40cm de distância focal) obtida no experimento realizado pelo prof. Nelson. Com essa figura podem obter a dimensão da grade.