

Exemplo 3

Deseja-se avaliar o efeito do comprimento das asas de helicópteros (X) na duração de certos tipos de vôo (Y).

Foram avaliados m helicópteros e analisados n_i voos para o i -ésimo helicóptero, $i = 1, 2, \dots, m$

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_i + \delta_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix} \quad *$$

Y_{ij} - duração do j -ésimo vôo no i -ésimo helicóptero.

X_i - comprimento da asa do i -ésimo helicóptero

δ_i - erro associado às medidas no i -ésimo helicóp.

ϵ_{ij} - erro associado ao j -ésimo vôo do i -ésimo helicóp.

Suposições: $\delta_i \text{ indep } \sim N(0, \sigma_\delta^2)$

$\epsilon_{ij} \text{ indep } \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$

δ_i e ϵ_{ij} v.a. independentes

Ponto chave: duas fontes de variabilidade:

δ_i e ϵ_{ij}

De acordo com essas suposições, durações de vôos para um mesmo helicóptero são correlacionadas.

efeitos fixos: x_i 's

efeitos aleatórios: δ_i 's e ϵ_{ij}

Modelos
Mistos

↑ mais de uma fonte de erro

Efeitos aleatórios geralmente ocorrem em uma estrutura hierárquica.

A forma de coleta de dados gera a necessidade dos modelos mistos.

* Múltiplas observações na mesma unidade amostral. Subamostragem.

$$\underset{\sim}{Y} = X \underset{\sim}{\beta} + Z \underset{\sim}{\delta} + \underset{\sim}{\epsilon}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{1}_{n_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \underset{\sim}{1}_{n_m} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{1}_i$ vetor de 1's $n_i \times 1$

$$\Rightarrow \text{Var}(\underset{\sim}{Y}) = \sigma^2 I + \sigma_\delta^2 Z Z'$$

Generalizando

Admite-se que

$$\underset{\sim}{y}_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \vdots \\ y_{jk_j} \end{bmatrix} = X_j \beta + z_j \underset{\sim}{b}_j + \underset{\sim}{\epsilon}_j \quad j=1, 2, \dots, n$$

**

$$X_j = \begin{bmatrix} x_{j11} & \dots & x_{jp1} \\ x_{j12} & & x_{jp2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j1k_j} & & x_{jp k_j} \end{bmatrix} \quad k \text{ instantes ou situações}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \text{vetor de parâmetros}$$

Suposições:

i) $\underset{\sim}{b}_j$ é um vetor aleatório (ou vetor de efeitos aleatórios) associado à j -ésima unidade

$$\underset{\sim}{b}_j \sim N(0, \Sigma_b) \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$i) \underline{\varepsilon}_j \sim N_{k_j}(\underline{0}, \sigma^2 I_{k_j}) \quad j=1, 2, \dots, n$$

ii) $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n, \underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, \dots, \underline{\varepsilon}_n$ vetores aleatórios independentes

$\Rightarrow$ independência entre $\underline{y}_j$ e $\underline{y}_l$ $j \neq l, j, l=1, 2, \dots, n$
(independência entre medidas em indivíduos distintos).

Consequências:

$$i) E(\underline{y}_j) = X_j \underline{\beta}$$

$$ii) \text{Var}(\underline{y}_j) = \text{Var}(X_j \underline{\beta} + Z_j \underline{b}_j + \underline{\varepsilon}_j) = \text{Var}(Z_j \underline{b}_j) + \text{Var}(\underline{\varepsilon}_j) \\ = Z_j \Sigma_b Z_j' + \sigma^2 I_{k_j} = \Sigma_j$$

$$iii) \underline{y}_j \sim N_{k_j}(X_j \underline{\beta}, \Sigma_j)$$

$$iv) \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix} \sim N_{\sum k_j}(X \underline{\beta}, \Sigma) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Sigma_n \end{bmatrix}$$

Esta formulação é bastante geral pois permite diferentes quantidades de medidas para cada unidade amostral.

β e Σ_j são estimados por máxima verossimilhança

As soluções explícitas das equações podem não ser obtidas de forma simples e em muitos casos, processos iterativos são necessários.

Caso Particular

$K_1 = K_2 = \dots = K_j = K$ e X_j constante para todo j

$$X_j = X^* \quad j=1, 2, \dots, n$$

O modelo ** pode ser escrito na forma linear geral como

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x^* \\ x^* \\ \vdots \\ x^* \end{bmatrix}_{n \times p} \quad V = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma \end{bmatrix}_{nK \times nK}$$

$$\Sigma = X^* \Sigma_\varepsilon X^{*'} + \sigma^2 I_K$$

Neste caso verifica-se que

$$VX = XF$$

$$\text{para } F = \Sigma_\varepsilon X^{*'} X^* + \sigma^2 I_p$$

e assim

$$\hat{\underline{\beta}}_G = \hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underline{y}$$

$$X'X = n X^{*'} X^* \quad X' \underline{y} = \sum_{j=1}^n X^{*'} y_j$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \frac{1}{n} [X^{*'} X^*]^{-1} \sum_{j=1}^n X^{*'} y_j = \frac{\sum_{j=1}^n [X^{*'} X^*]^{-1} X^{*'} y_j}{n}$$