9a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) := -\int_1^x \frac{1}{t}\,d\,t,$$
e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sua inversa. Mostre que $g(0) = 0$ e $g'(x) = g(x)$.

2. Se $a < b$, definimos a integral $\int_b^a f(x)d\,x := \int_b^a f(x)d\,x$. Mostre que:

   a) Se $f : [-a, a]$ ́função ímpar (i.e: $f(-x) = -f(x)$) então $\int_{-a}^a f(x)d\,x = 0$.

   a) Se $f : [-a, a]$ ́função par (i.e: $f(-x) = f(x)$ então $\int_{-a}^0 f(x)d\,x = \int_0^a f(x)d\,x$.

3. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 1 \\ 1 \text{ se } x = 0. \end{cases}$

   Prove que f é integrável, mas não existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ e f é contínua em c com $f(c) > 0$. Mostre que
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$,

   Prove que f não é integrável em $[0, 1]$.

6. Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ se } x = \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível} \\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$,

   Prove que f é integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 f = 0$. (Ponha $f(0) = 0$.)

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função definida por $f(x) = \int_a^x$ é Lipschitziana.