



PME3100 Mecânica I



Notas de aula

Estática - Sistemas de Forças (parte 1)

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

2 – Estática

Como já mencionado, a Mecânica como ciência se propõe a estudar o comportamento de corpos sob a ação de forças. Na Estática, o foco se dá nas situações de equilíbrio, ou seja, quando não há variações no tempo. Em geral, os problemas se referem a determinar esforços numa dada configuração do sistema, ou determinar a configuração num dado conjunto de esforços.

Primeiramente, vamos definir algumas grandezas e conceitos fundamentais. Matéria, espaço e tempo são pressupostos como conceitos primitivos. No âmbito desta disciplina, trataremos de corpos rígidos (modelo físico).

2.1 – SISTEMAS DE FORÇAS

2.1.1 – Forças e vetores aplicados

O conceito de força é, antes de tudo, intuitivo e experimental. Podemos dizer que é a medida quantitativa das interações entre corpos.

Para definir uma força, necessitamos:

Força	Intensidade Direção Sentido A ordem de aplicação não muda o resultado Ponto de aplicação P	Vetor \vec{F}	Vetor aplicado (\vec{F}, P) $\vec{F} = \lambda(A - B)$
-------	--	-----------------	--

Modelo físico: uma força não é aplicada em um ponto, na realidade, mas em uma área ou região (pequena ou não).

2.1.2 – Definição de sistemas de forças

Um sistema de forças é um conjunto de forças que agem num corpo.

Com relação a movimentos, um sistema de forças aplicado num corpo (sistema material) pode ter a tendência de fazer esse corpo:

- Deslocar-se (mudar de posição) >>> efeito da Resultante do sistema de forças
- Girar >>> efeito do Momento do sistema de forças

2.1.3 – Resultante de um sistema de forças

A resultante \vec{R} de um sistema de forças é o vetor livre definido pela soma de todas as forças do sistema.

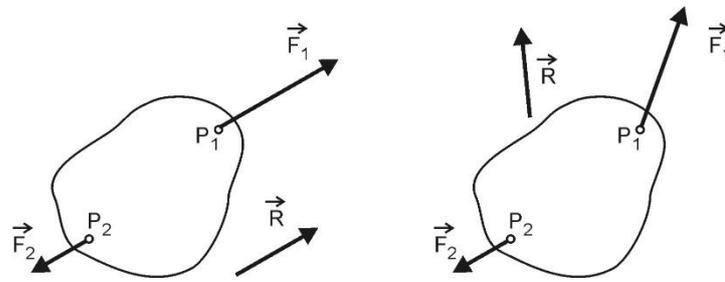


Figura 2.1.3.1 - Resultante

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.1)$$

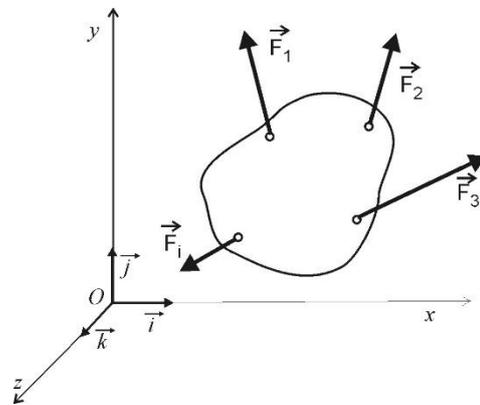
A resultante não é uma força, porque a ela não está associado um ponto de aplicação. Pode-se trabalhar com suas componentes em um dado sistema de coordenadas, sendo:

$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$$

$$\vec{R} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

temos:

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^n X_i \\ Y = \sum_{i=1}^n Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^n Z_i \end{cases}$$



2.1.4 – Momento

Se considerarmos uma força aplicada num ponto de um corpo e outro ponto qualquer, esta força pode ter a tendência de fazer o corpo girar em torno desse ponto. Podemos dizer que o momento é a medida dessa tendência.

2.1.4.1 – Momento em relação a um ponto (polo)

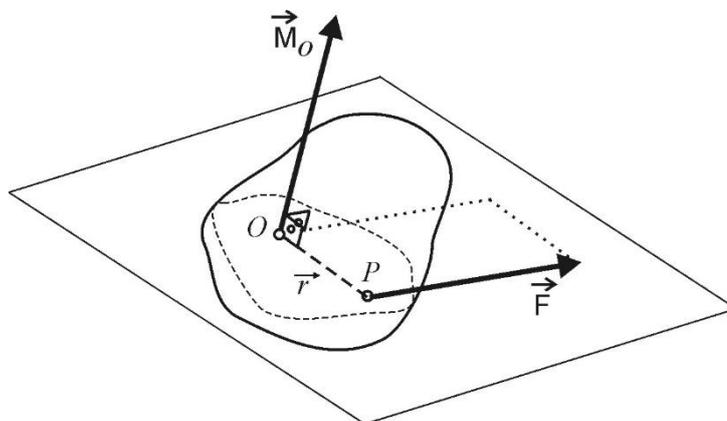


Figura 2.1.4.1 – Momento em relação a um ponto

Na figura, o vetor \vec{M}_O é ortogonal ao vetor $\vec{r} = (P - O)$ e a \vec{F} .

Definição: o momento de um sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) em relação ao ponto (polo) O é o vetor:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (2.2)$$

OBS.: O momento de um sistema de forças não é necessariamente ortogonal a nenhuma força nem à resultante.

Teorema de Varignon (forças concorrentes): “O momento de um sistema de forças concorrentes (isto é, de mesmo ponto de aplicação P) em relação a um polo O qualquer, é igual ao momento em relação a O da resultante do sistema, suposta aplicada no ponto de concurso das forças”.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P - O) \wedge \vec{F}_i = (P - O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = (P - O) \wedge \vec{R}$$

Fórmula de mudança de polo:

Sendo O e O' dois pontos distintos:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} \quad (2.3)$$

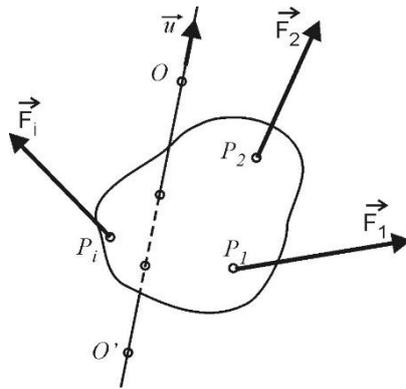
A demonstração é imediata:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^n (P_i - O') \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n [(P_i - O) + (O - O')] \wedge \vec{F}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Observações:

- Se $\vec{R} = \vec{0}$, o momento independe do polo.
- Se $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$, qualquer que seja O' , então $\vec{R} = \vec{0}$.
- Se $\vec{R} \neq \vec{0}$, então $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$ se e somente se $(O - O') \parallel \vec{R}$.
- $\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$, ou seja, a projeção do momento de um sistema na direção da resultante é invariante para mudança de polo.

2.1.4.2 – Momento em relação a um eixo



eixo: reta orientada $O\vec{u}$, onde \vec{u} é um vetor ($|\vec{u}| = 1$)

Figura 2.1.4.2 – Momento em relação a um eixo

Definição: o momento de um sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) em relação ao eixo $O\vec{u}$ é o número real:

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \quad (2.4)$$

Sendo O' outro ponto qualquer do eixo, usando a fórmula de mudança de polo:

$$M'_u = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = \left[\vec{M}_O + \underbrace{(O - O') \wedge \vec{R}}_{\substack{\parallel \vec{u} \\ \perp \vec{u}}} \right] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

Assim, o momento M_u é invariante em relação a pontos do eixo.

Propriedade: O momento do sistema de forças é a soma dos momentos de cada força em relação ao eixo $O\vec{u}$:

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = \left[\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \right] \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i \cdot \vec{u}] = \sum_{i=1}^n [\vec{M}_{O_i} \cdot \vec{u}] = \sum_{i=1}^n M_{ui}$$

2.1.4.3 – Componentes de \vec{M}_O

Dados:

- uma força (\vec{F}, P) ;
- um polo O ;
- um sistema de eixos $Oxyz$ de versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Seja:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \\ P - O &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{M}_O &= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \end{aligned}$$

Temos:

$$(a) \vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_x = yZ - zY \\ M_y = zX - xZ \\ M_z = xY - Yx \end{cases}$$

Para um sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) :

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i Z_i - z_i Y_i$$

.

.

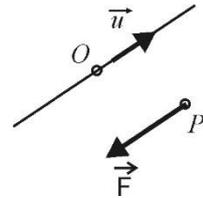
etc.

- (b) M_x , M_y e M_z são os momentos da força em relação aos eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente.

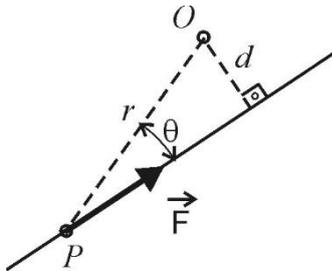
Observações:

- A) Se uma força for paralela a um eixo, seu momento em relação a este será nulo:

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{M}_O \cdot \vec{u} = 0$$



- B) O módulo do momento de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pela distância da linha de ação da força ao ponto (“braço da força”):



$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (P - O) \wedge \vec{F} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\vec{M}_O| &= |P - O| \cdot |\vec{F}| \cdot |\sin \theta| = \\ &= |\vec{F}| \cdot \underbrace{|r \sin \theta|}_d = |\vec{F}| \cdot d \end{aligned}$$