



17/2. Grupo 1 $\overset{x}{\sim} N_2(\mu_1, \Sigma)$ Grupo 2 $\overset{y}{\sim} N_2(\mu_2, \Sigma)$ $\alpha = 0,05$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

Vai calcular S_c^2 para realizar o teste.

$n_1 = n_2 = 10$. Temos que $\bar{X} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2,6 \end{bmatrix}$ e $\bar{Y} = \begin{bmatrix} 41,6 \\ 12,8 \end{bmatrix}$.

Logo vamos calcular as matrizes de covariância amostral.

$$A_1 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})(x_i - \bar{X})' = \frac{1}{9} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0,4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left[\begin{pmatrix} 16 & 2,4 \\ 2,4 & 0,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1,2 \\ -1,2 & 0,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 4,8 \\ 4,8 & 2,56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2,8 \\ 2,8 & 1,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1,4 \\ 1,4 & 1,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 4,2 \\ 4,2 & 1,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -0,4 \\ -0,4 & 0,16 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 44 & 14 \\ 14 & 10,4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{Y})(y_i - \bar{Y})' = \frac{1}{9} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,4 & 2,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,4 \\ 3,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,4 & 3,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,4 & 2,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -2,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,6 & -2,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8,6 \\ -2,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8,6 & -2,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,6 \\ -2,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4,6 & -2,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,4 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,6 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,6 & 0,2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left[\begin{pmatrix} 19,36 & 9,68 \\ 9,68 & 4,84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29,16 & 17,28 \\ 17,28 & 10,24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11,56 & 7,48 \\ 7,48 & 4,84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,36 & 1,68 \\ 1,68 & 7,84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,16 & 0,08 \\ 0,08 & 0,04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 73,96 & 24,08 \\ 24,08 & 7,84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21,16 & 12,88 \\ 12,88 & 7,84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,76 & 0,48 \\ 0,48 & 0,04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,36 & -0,12 \\ -0,12 & 0,04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 256 & -0,32 \\ -0,32 & 0,04 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 164,4 & 73,2 \\ 73,2 & 43,6 \end{bmatrix}$$

Então $S_c = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \cdot [(n_1 - 1)A_1 + (n_2 - 1)A_2] = \frac{1}{18} \cdot [9 \cdot A_1 + 9 \cdot A_2] = \frac{1}{18} \cdot \left[\begin{bmatrix} 44 & 14 \\ 14 & 10,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 164,4 & 73,2 \\ 73,2 & 43,6 \end{bmatrix} \right] =$

$$= \begin{bmatrix} 11,578 & 4,844 \\ 4,844 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{logo} \quad S_c^{-1} = \frac{1}{11,270} \begin{bmatrix} 3 & -4,844 \\ -4,844 & 11,578 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } T^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S_c^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} \cdot \begin{pmatrix} -27,6 & -10,2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11,27} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4,844 \\ -4,844 & 11,578 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27,6 \\ -10,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{11,27} \cdot \begin{pmatrix} -33,391 & 15,599 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27,6 \\ -10,2 \end{pmatrix} = \frac{5}{11,27} \cdot 762,482 = 338,28$$



Rejeitamos H_0 ao nível α se $T^2 > \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{n_1 + n_2 - p - 1} \cdot F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\alpha)$

$n_1 + n_2 - p - 1 = 10 + 10 - 2 - 1 = 17$, então pela tabela $F_{2, 17}(0,05) = 19,435$ **3,59**

Consequentemente $\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{n_1 + n_2 - p - 1} \cdot F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\alpha) = \frac{(10 + 10 - 2) \cdot 2}{10 + 10 - 2 - 1} \cdot 19,435 = 41,156$.

Como $T^2 = 338,28 > \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{n_1 + n_2 - p - 1} \cdot F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\alpha)$; rejeito H_0 . Então posso dizer que $\mu_1 \neq \mu_2$.

15

3. $n = 15$ com e sem uso do aditivo X - com aditivo Y - sem aditivo

Então, usando o teste do sinal, teremos + se $X_i < Y_i$ - se $X_i > Y_i$ 0 se houve empate.

Estudando a amostra temos um empate e + em 2 casos.

$\alpha = 0,05$. Queremos testar se há melhora com o aditivo.

$$H_0: P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i) \quad \forall i$$

$$H_a: P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i) \quad \forall i$$

Chamando de p a $P(+)$ e $P(-) = P(X_i < Y_i)$ e $P(-) = P(X_i > Y_i)$

$$H_0: P(+)=P(-)=p \Leftrightarrow H_0: p = \frac{1}{2}$$

$$H_a: P(+)>P(-) \quad H_a: p > \frac{1}{2}$$

$$T = n \text{ de } + \text{'s} = 2 \quad n' = n^\circ \text{ desprezando empates} = 14$$

Quer achar a R.C com $\alpha = 0,05$.

$$P(Y \leq t_c) = \alpha \quad Y \sim \text{Bin}(n', \frac{1}{2})$$

Pela tabela Binomial, vemos que t_c fica entre 3 e 4, sendo que $P(Y \leq 3) < \alpha$.

Logo, a região crítica é $\{0, 1, 2, 3\}$. Como 2 pertence à região crítica, rejeito H_0 e aceito que há melhora com a utilização do aditivo.

Como $T = 2 \in R.C$, então rejeito H_0 e aceito a hipótese de melhora.





2,5

5. X - antes de receber informação
Y - depois de receber informação

0 - favorável ao projeto $n=135$
1 - contra o projeto

X \ Y	0	1
0	85 27	92
1	13 30	43
	98	37

a) $\alpha = 0,05$

$$H_0: P(X_i=0) = P(Y_i=0) \quad n=b+c=20$$

$$H_a: P(X_i=0) \neq P(Y_i=0)$$

Como $n \geq 20$, vamos usar $T = \frac{(b-c)^2}{b+c}$; nessa forma, rejeita H_0 se $T \geq \chi_{1,1-\alpha}$;

com $\chi_{1,1-\alpha}$ - quantil de ordem $1-\alpha$ de χ_1^2 . 3,84

Observando a tabela, temos que $\chi_{1,1-\alpha} = 3,84$. Temos que $T = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(7-13)^2}{7+13} = 1,8$

Como $T < \chi_{1,1-\alpha}$ pois $1,8 < 3,84$; aceita H_0 , portanto aceita que a proporção de favoráveis é a mesma antes e depois da semana de informação.

b)

proporção de pessoas que não mudaram de opinião $T(X_i=0, Y_i=0)$

A proporção de pessoas que não mudaram de opinião é $\frac{a+d}{n} = \frac{85+30}{135} = \frac{115}{135} \approx 0,852$

Vamos encontrar primeiramente o valor z tal que $P(-z < Z < z) = 1-\alpha = \gamma = 0,95$; olhando a tabela $z = 1,96$.

$$\text{Logo } r^* = np^* - z\sqrt{np^*(1-p^*)} = 115,02 - 1,96 \cdot 4,126 = 106,933 \approx 107 \quad \text{e} \quad r^* = np^* + z\sqrt{np^*(1-p^*)} = 115,02 + 1,96 \cdot 4,126 = 123,107 \approx 123.$$

Portanto o intervalo de confiança para p = proporção de pessoas que não mudaram de opinião com 0,95% de confiança é $\left[\frac{107}{135}, \frac{123}{135}\right] \approx [0,7926; 0,9111]$

2,2

$\alpha = 0,05$

4.a) $r = 0,95$; encontrar região de confiança p 1(x₁, x₂)

U = 35 e de Benjamini-Tukey $t_{0,1}(0,05) = t_{0,1}(0,05) = t_{0,1}(0,05)$

$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{*-1} (\bar{X} - \mu)$. Lembrando que $S^{*-1} = \frac{1}{19,8237} \begin{bmatrix} 24,407 & -20,292 \\ -20,292 & 17,683 \end{bmatrix}$

Logo $T^2 = 35 \cdot \frac{1}{19,8237} \cdot [22,86 - \mu_1 \quad 24,397 - \mu_2] \begin{bmatrix} 24,407 & -20,292 \\ -20,292 & 17,683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22,86 - \mu_1 \\ 24,397 - \mu_2 \end{bmatrix} =$
 $= \frac{35}{19,8237} \cdot [557,944 - 24,407\mu_1 - 495,0639 + 20,292\mu_2 - 463,875 + 20,292\mu_1 + 431,4122 - 17,683\mu_2] =$
 $\cdot \begin{bmatrix} 22,86 - \mu_1 \\ 24,397 - \mu_2 \end{bmatrix} = \frac{35}{19,8237} \cdot [-620,8241\mu_1 + 1437,439 + 463,875\mu_2 + 24,407\mu_1^2 - 20,292\mu_1\mu_2 +$
 $- 463,875\mu_2 - 791,9949 + 495,0639\mu_1 - 20,292\mu_1\mu_2 + 17,683\mu_2^2] =$

$= \frac{35}{19,8237} \cdot [24,407\mu_1^2 + 17,683\mu_2^2 - 40,584\mu_1\mu_2 - 125,7601\mu_1 + 645,441] =$
 $= 43,092\mu_1^2 + 31,2205\mu_2^2 - 71,6536\mu_1\mu_2 - 222,0374\mu_1 + 1139,567$

Região crítica: $T^2 > \frac{(n-1) \cdot p \cdot F_{p,n-p}(\alpha)}{n-p} = \frac{34 \cdot 2 \cdot 19,463}{35-2} = 40,1056$

$F_{p,n-p}(\alpha) = F_{2,33}(0,05) = 19,463$

Logo, a região de confiança é $T^2 \leq 40,1056 \Rightarrow$

$43,092\mu_1^2 + 31,2205\mu_2^2 - 71,6536\mu_1\mu_2 - 222,0374\mu_1 \leq -1099,4614$

b) $H_0: \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$
 $H_a: \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$

$- * = 43,092\mu_1^2 + 31,2205\mu_2^2 - 71,6536\mu_1\mu_2 - 222,0374\mu_1 = 17236,8 + 15110,722 - 31527,584 -$
 $- 4440,748 = -3620,81$ que pertence à região de confiança.

Logo, aceita H_0 .

Nível de significância?



c) $\gamma = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1$, IC pelo método de Bonferroni. $n = 35$

Pelo método de Bonferroni, temos que IC para μ_1 é $\left[\bar{X}_1 - t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}; \bar{X}_1 + t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \right]$

$$\left[\bar{X}_1 - t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}; \bar{X}_1 + t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \right] = \left[22,86 - t_{34}(0,025) \sqrt{\frac{17,683}{35}}; 22,86 + t_{34}(0,025) \sqrt{\frac{17,683}{35}} \right]$$

Como que $t_{34}(0,025) = 2,45$, portanto IC para μ_1 é $[21,1186; 24,6014]$.

e IC para μ_2 é $\left[\bar{X}_2 - t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}; \bar{X}_2 + t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \right] = \left[24,397 - 2,45 \sqrt{\frac{24,407}{35}}; 24,397 + 2,45 \sqrt{\frac{24,407}{35}} \right]$

$$= [22,3511; 26,4430]$$

2,0

1. Vou resolver este exercício usando o teste de Kruskal-Wallis.

Vou começar ordenando todas as amostras para determinar seus postos:

27c 28c 29c 30c 31B 31c 32A 32c 33B 33c 34A 35B 36B 38A 38B 40A 40B 42A
1 2 3 4 5,5 5,5 7,5 7,5 9,5 9,5 11 12 13 14,5 14,5 16,5 16,5 18

Ordenando de acordo com os marcas

A 32 38 40 42 34 30
posto 7,5 14,5 16,5 18 11 4

B 33 36 38 40 31 35
posto 9,5 13 14,5 16,5 5,5 12

C 27 33 29 32 31 28
posto 1 9,5 3 7,5 5,5 2

$$H_0: E(A) = E(B) = E(C)$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = 6 \quad N = 18$$

H_a : pelo menos uma das marcas tende a produzir valores maiores

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i}) = 71,5 \quad R_2 = 71 \quad R_3 = 28,5$$

$$T = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{i=1}^3 \left[\frac{R_i - \frac{n_i(N+1)}{2}}{n_i} \right]^2 = \frac{12}{18 \cdot 19} \cdot \left[\frac{(71,5 - 31,9)^2}{6} + \frac{(71 - 31,9)^2}{6} + \frac{(28,5 - 31,9)^2}{6} \right] =$$

$$\approx 0,0351 \cdot [35,0417 + 32,6667 + 135,375] = 7,1282$$

Como $n_i > 5$; rejeito H_0 se $T \geq x^*$, onde x^* é tal que $P(\chi^2_{K-1} \geq x^*) = \alpha = 0,05$

Portanto $x^* = 5,99$. Como $T = 7,1282 > 5,99$ rejeito H_0 . Logo concluo que pelo menos uma das marcas tende a produzir valores maiores.