Lista 3: Regra da Cadeia, Classes C^k e Polinômio de Taylor

Regra da Cadeia e Desigualdade do Valor Médio

Nos exercícios 1-4 abaixo, prove, usando a Regra da Cadeia, que a função F é diferenciável no ponto $\overline{\mathbf{x}}$ e calcule sua diferencial em $\overline{\mathbf{x}}$.

1) $\overline{\mathbf{x}} = (1,1)$,

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \det \begin{bmatrix} x-y & \log 1+x^2+y^2 \\ e^x & \cos y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Não é para expandir o determinante).

2) $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$, $T\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ transformação linear,

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \langle T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

3) $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto, $\overline{\mathbf{x}} \in \Omega$, $f\colon \Omega \to \Omega$ diferenciável, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F\colon \Omega &\to \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto a_n f^n(\mathbf{x}) + \cdots + a_1 f(\mathbf{x}) + a_0 \end{aligned}$$

(aqui, $f^2(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{x}))$, $f^3(\mathbf{x}) = f(f^2(\mathbf{x}))$ e assim por diante).

4) $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$, $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^p$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis em $\overline{\mathbf{x}}$, $L\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ bilinear,

$$\begin{aligned} F\colon \Omega &\to \mathbb{R}^q \\ \mathbf{x} &\mapsto L\left(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\right) \end{aligned}$$

5) Consideramos novamente o conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $n\times n$ com entradas reais como equivalente ao $\mathbb{R}^{n^2}$. Considere a função $f\colon M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $f(A)=A^tA$. Usando a Regra da Cadeia (mais especificamente, o ex. 4), prove que f é diferenciável e calcule sua diferencial em cada ponto.

$g: X \to X$, $A \mapsto A^t$ $\qquad$ $h: X \to X$, $A \mapsto A$

Para os exercícios 6-9 abaixo, usaremos a seguinte definição:

Definição: Sejam $M\subset\mathbb{R}^p$ um conjunto não-vazio, $\overline{\mathbf{x}}\in M$ e $F\colon M\to\mathbb{R}^p$ uma função contínua (um *campo de vetores*). Dizemos que o campo F é *ortogonal a M no ponto* $\overline{\mathbf{x}}$ se, para qualquer curva $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^p$, com imagem contida em M, diferenciável em $t=0$ e com $\gamma(0)=\overline{\mathbf{x}}$, vale:

$F: X\times X \to X$, $(A,B)\mapsto AB$ $\qquad$ $G: X \to X\times X$, $A \mapsto (g(A), h(A))$

$$\langle\dot\gamma(0),F(\overline{\mathbf{x}})\rangle=0$$

$DF(A,B)(H,K) = F(A,K) + F(B,H) = AK + BH$

$DG(A)(H) = G(H) = (H^t, H)$

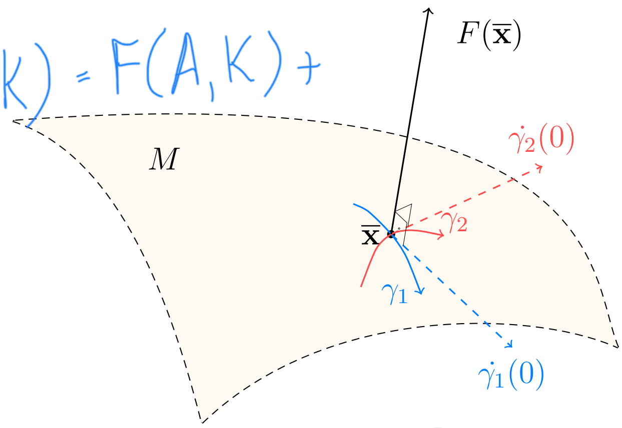

Figura 1

$f = F\circ G$ $\qquad$ $Df(A)(H) = DF(G(A))\circ DG(A)(H)$

Dizemos que o campo F é *normal a M* se F é ortogonal a M em todos os pontos de M.

6) Prove que:

$= DF(A^t, A)(H^t, H) =$

(a) se $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=0\}$, então um campo de vetores $F=(F_x,F_y,F_z)$ é normal a M se, e somente se, $F_x(\mathbf{x})=F_y(\mathbf{x})=0\ \forall\,\mathbf{x}\in M$;

$= A^tH + AH^t$

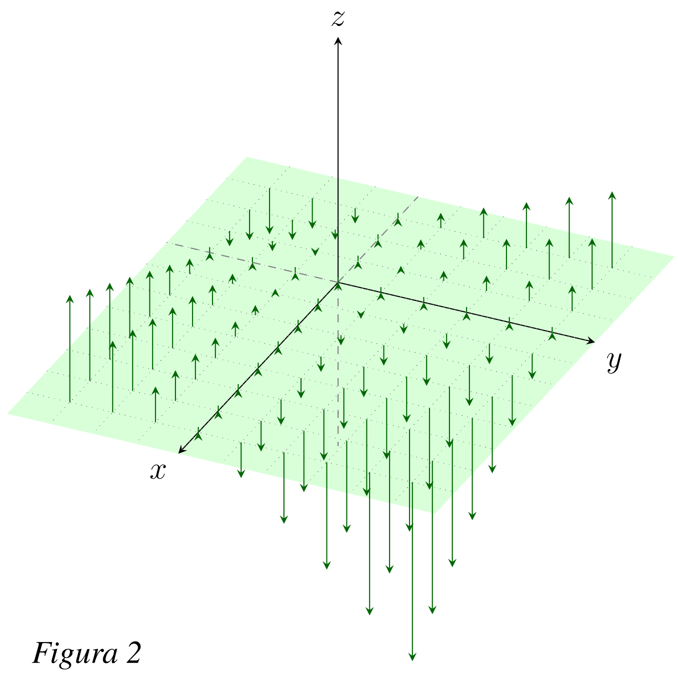

Figura 2

(b) se $M = \{\overline{\mathbf{x}}\}$ consiste de um ponto só, então qualquer campo F é ortogonal a M;

(c) se $\overline{\mathbf{x}}$ é um ponto interior de M, então nenhum campo F é ortogonal a M em $\overline{\mathbf{x}}$. Conclua que se $\overset{\circ}{M} \neq \varnothing$, então nenhum campo pode ser normal a M;

(d) (*desafio*) se $M = [0, 1] \times [0, 1]$ é o quadrado unitário no plano, então em qualquer ponto $(x, y) \in M$ há campos F ortogonais a M em (x, y). Existem campos F normais a M?

7) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Fixemos $c \in f\,(\Omega)$ e seja $M = f^{-1}(\{c\}) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) = c\}$ (M é o que chamamos de *conjunto de nível* c *da função* f). Mostre que:

(a) A função $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ dada por $F(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ é contínua, isto é, é um campo de vetores;

(b) O campo $F = \operatorname{grad} f$ é normal a M. Assim, o campo gradiente de uma função é normal aos seus conjuntos de nível.

8) Prove que, se $M = S(\mathbf{0}, 1)$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^p$, o campo *identidade*

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} \end{aligned}$$

é normal a M (use o ex. 7).

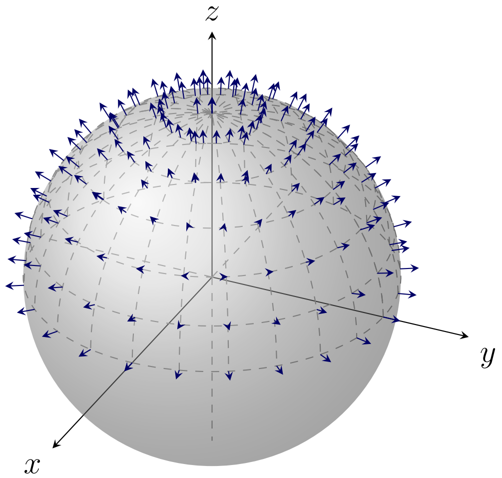

Figura 3

9) (Campo elétrico na superfície de um condutor) Seja C um *condutor elétrico perfeito* – isto é, um objeto sólido maciço e sem quinas (cubos não valem!) no espaço 3D em que cargas elétricas têm total liberdade de movimentação – em equilíbrio eletrostático. Se S é a superfície de C, prove que o campo elétrico $\vec{E}$ é sempre normal a S (use o ex. 7).

10) Use a Desigualdade do Valor Médio para provar o seguinte: se $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ é um aberto conexo não-vazio e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ é uma função diferenciável tal que $Df(\mathbf{x}) = \mathit{0}$ é a transformação linear nula para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, então f é constante.

Derivadas de Ordem Superior e Classes C^k

Nos exercícios 11-14 abaixo, F é de classe C^1. Encontre o maior $1 \leq k \leq \infty$ tal que F pertence à classe C^k, e calcule as derivadas parciais até a ordem indicada.

11) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 - 3y + \sin x \cos 2y$; derivadas parciais até a ordem 2.

12) $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ transformação linear; derivadas parciais até a ordem k_{max}.

13) $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear; derivadas parciais até a ordem k_{max}.

14) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F : (\mathbb{R}^p)^n \to \mathbb{R}^q$ é n-linear

E. L. Lima: Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$

$$F(x,y) = \begin{cases} x^4y^4 \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$DF : (\mathbb{R}^p)^n \to \mathcal{L}\left((\mathbb{R}^p)^n ; \mathbb{R}^q\right)$ é soma de fçs n-1-lineares

derivadas parciais até a ordem k_{max}.

15) Prove que as funções F dos exs. 1, 2 e 5 são de classe C^∞.

16) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto. Para cada $1 \leq k \leq \infty$, definimos o conjunto

$$C^k(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é de classe } C^k \right\}$$

Prove que $C^k(\Omega)$ é um espaço vetorial real, e que, se $f, g \in C^k(\Omega)$, então $fg \in C^k(\Omega)$ (aqui, $fg\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$).

17) (Polinômios) Nesse exercício, daremos uma definição indutiva dos polinômios a n variáveis reais.

Começamos definindo que o único polinômio de grau ≤ -1 é o polinômio nulo $\mathcal{Z}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Em seguida, definimos o conjunto dos polinômios de grau ≤ 0, $\mathcal{P}_0$, que consiste das funções constantes $p(x_1, \ldots, x_n) = c$. Em seguida, definimos os polinômios de grau ≤ 1 da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_1 = \{p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \exists\, q_1, \ldots, q_n, r \in \mathcal{P}_0 \text{ t.q. } p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, (q_1(\mathbf{x}), \ldots, q_n(\mathbf{x})) \rangle + r(\mathbf{x})\}$$

Mais geralmente, supondo definidos os polinômios de grau $\leq d$, definimos os polinômios de grau $\leq d+1$ por:

$$\mathcal{P}_{d+1} = \{p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \exists\, q_1, \ldots, q_n, r \in \mathcal{P}_d \text{ t.q. } p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, (q_1(\mathbf{x}), \ldots, q_n(\mathbf{x}))\rangle + r(\mathbf{x})\}$$

Por indução, assim definimos os polinômios de grau $\leq d$ a n variáveis, para qualquer d. O conjunto de todos os polinômios é então $\mathcal{P} = \bigcup_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_d$. Se p é um polinômio, seu grau é o menor d tal que $p \in \mathcal{P}_d$.

Prove por indução que, se p é um polinômio de grau $\leq d$ a n variáveis e $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ é um polinômio de grau $\leq d-1$. Conclua que todo polinômio é de classe C^∞.

Polinômio de Taylor

18) Nos itens abaixo, a função F é de classe C^∞. Calcule seu polinômio de Taylor de ordem 3 com relação a $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

(a)

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \exp\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} y^{\frac{\sin x}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \sqrt{1+x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

Desafios

19) (Outra interpretação da classe C^1) Seja $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função diferenciável definida no aberto Ω. Para cada $\overline{\mathbf{x}} \in \Omega$, $Df(\overline{\mathbf{x}})$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$.
Recorde agora o espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$, com soma e multiplicação escalar definidas pontualmente: para $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$S + T\colon \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) \qquad \alpha S\colon \mathbf{x} \mapsto \alpha S(\mathbf{x})$$

No curso de Álgebra Linear em Matemática III, foi provado que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tem dimensão $d = pq$, e portanto, pode ser considerado equivalente ao $\mathbb{R}^{pq}$.
Considere a função $Df\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ cujo valor em $\mathbf{x}$ é a diferencial de f em $\mathbf{x}$, $Df(\mathbf{x})$ (tipicamente chamada de *aplicação diferencial* de f). Como vemos acima, Df pode ser considerada como uma função de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^{pq}$, e, portanto, podemos nos perguntar naturalmente sob que condições Df é contínua, ou até diferenciável.
Prove que:

(a) $Df = (Df_1, ..., Df_{pq})$ com $Df_{(i-1)p+j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para $i = 1, ..., p$ e $j = 1, ..., q$ (isto é, as funções coordenadas de Df são as derivadas parciais);

(b) f é de classe C^1 (isto é, suas derivadas parciais são contínuas) se, e somente se, a aplicação diferencial de f, Df, é uma função contínua.

20) (Teorema de Schwarz)

(a) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto do plano e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com derivadas parciais de segunda ordem em Ω. Suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de f são contínuas no ponto $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Dica: Defina, num pequeno retângulo aberto $R = (-\varepsilon, \varepsilon)^2$ com centro $(0, 0)$ (tal que $(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) \in \Omega\ \forall\ (h, k) \in R$), as funções

$$\begin{aligned} u(h, k) &= f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x} + h, \tilde{y}) \\ v(h, k) &= f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x}, \tilde{y} + k) \\ w(h, k) &= f(\tilde{x} + h, \tilde{y} + k) - f(\tilde{x} + h, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{y} + k) + f(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned}$$

Observe que $w(h, k) = u(h, k) - u(0, k) = v(h, k) - v(h, 0)$. Use o Teorema do Valor Médio para segmentos paralelos aos eixos coordenados quatro vezes para obter

$$\begin{aligned} u(h, k) - u(0, k) &= hk \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\tilde{x} + s_1 h, \tilde{y} + s_2 k) \\ v(h, k) - v(h, 0) &= hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\tilde{x} + t_1 h, \tilde{y} + t_2 k) \end{aligned}$$

para certos $s_1 = s_1(h, k), s_2 = s_2(h, k), t_1 = t_1(h, k), t_2 = t_2(h, k) \in (0, 1)$. Conclua dividindo por hk, tomando o limite e usando a continuidade de $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ e $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ em $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

(b) O caso geral é o seguinte: Ω é um aberto do $\mathbb{R}^p$, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ é uma função de classe C^1 com derivadas parciais de segunda ordem em Ω, e as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas no ponto $\overline{\mathbf{x}}$; então para quaisquer $i \in \{1, ..., q\}$ e $j, k \in \{1, ..., p\}$ vale

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\overline{\mathbf{x}}) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\overline{\mathbf{x}})$$

Mostre que o caso geral é consequência do caso do item **(a)**. *Dica:* Fixados $\overline{\mathbf{x}}, i, j, k$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $R = (\overline{x}_1 - \varepsilon, \overline{x}_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (\overline{x}_p - \varepsilon, \overline{x}_p + \varepsilon) \subset \Omega$ e defina $\phi_{i,j,k} \colon (\overline{x}_j - \varepsilon, \overline{x}_j + \varepsilon) \times (\overline{x}_k - \varepsilon, \overline{x}_k + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_{i,j,k}(x, y) = f_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1}, x, \overline{x}_{j+1}, \ldots, \overline{x}_{k-1}, y, \overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_p)$$

Aplique o item **(a)** a $\phi_{i,j,k}$ e conclua o resultado.

21) (Existência de Funções Teste)

$f \in C^\infty$

(a) Mostre que a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é de classe C^∞. *Dica:* Mostre que, se f é de classe C^k e $f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ para $x > 0$, onde p_k é um polinômio, então $f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ para $x > 0$, onde p_{k+1} é também um polinômio.

Mostre que $\lim_{x \to 0^+} p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$ para qualquer polinômio p. Conclua que $f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0^+} f^{(k+1)}(x) = 0$, e portanto, f é de classe C^{k+1}. Conclua por indução que f é de classe C^∞.

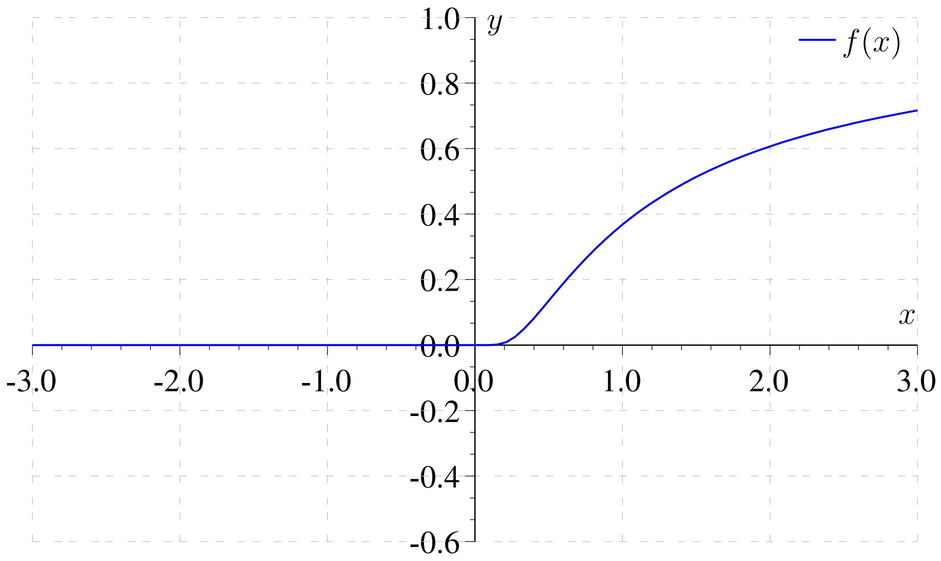

Figura 4

(b) Sejam $a < b$ fixados. Defina $h_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h_{a,b}(x) = \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)}$$

onde f é a função do item **(a)**. Mostre que $h_{a,b}$ é de classe C^∞ e que

$$\begin{cases} h_{a,b}(x) = 1 & \text{se } x \leq a \\ 0 < h_{a,b}(x) < 1 & \text{se } a < x < b \\ h_{a,b}(x) = 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

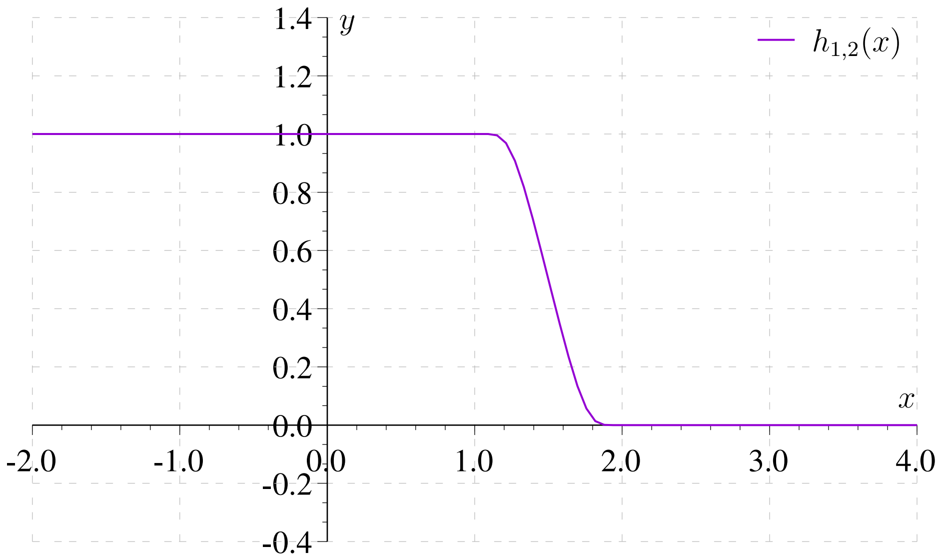

Figura 5

(c) Sejam $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^p$, $0 < r_1 < r_2$ quaisquer. Mostre que a função $\varphi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(\mathbf{x}) = h_{\sqrt{r_1},\sqrt{r_2}}\left(||\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}||^2\right)$$

é de classe C^∞, é constante $= 1$ em $\overline{B(\overline{\mathbf{x}}, r_1)}$, é constante $= 0$ em $B(\overline{\mathbf{x}}, r_2)^c$ e satisfaz $0 < \varphi(\mathbf{x}) < 1 \;\forall\, \mathbf{x} \in B(\overline{\mathbf{x}}, r_2) \setminus \overline{B(\overline{\mathbf{x}}, r_1)}$.

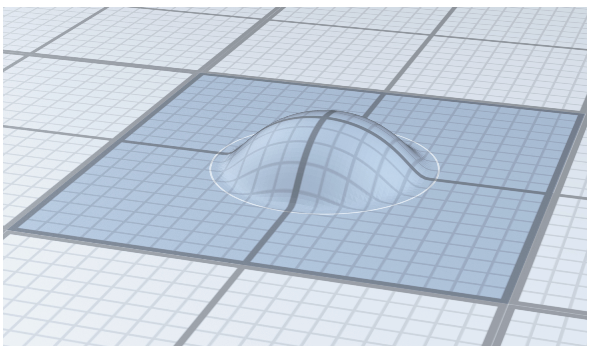

Figura 6

(d) Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$ e Ω um aberto que contém K. Mostre que existem uma função $\psi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e L compacto tais que $K \subset L \subset \Omega$, $\psi \equiv 1$ em K e $\psi \equiv 0$ em L^c.

Ideia da prova: Para cada $\mathbf{x}$ em K, sejam $B_\mathbf{x} \subset B'_\mathbf{x}$ bolas abertas centradas em $\mathbf{x}$ tais que

$$\overline{B_\mathbf{x}} \subset B'_\mathbf{x} \subset \overline{B'_\mathbf{x}} \subset \Omega$$

Extraia uma subcobertura finita $\{B_i := B_{\mathbf{x_i}}\}_{i=1}^N$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja φ_i a função φ do item **(c)** com $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x_i}$, $r_1 =$ raio de B_i e $r_2 =$ raio de $B'_i := B'_{\mathbf{x_i}}$. Tome $L = \bigcup_{i=1}^N \overline{B'_i}$.

Defina $\Lambda\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ por

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) + \prod_{i=1}^N (1 - \varphi_i(\mathbf{x}))$$

Termine a prova mostrando que Λ é estritamente positiva e que

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Lambda(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x})$$

satisfaz as condições do enunciado.

Observação: Se $f\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ é contínua, definimos o seu *suporte* como

$$\text{supp } f := \overline{\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto. Para $1 \leq k \leq \infty$, definimos o espaço $C_c^k(\Omega)$ das *funções C^k com suporte compacto em* Ω como

$$C_c^k(\Omega) = \left\{ f \in C^k(\mathbb{R}^p) \mid \text{supp } f \text{ é compacto e supp } f \subset \Omega \right\}$$

Não é difícil ver que cada $C_c^k(\Omega)$ é um espaço vetorial de funções, e que

$$C_c^1(\Omega) \supset C_c^2(\Omega) \supset C_c^3(\Omega) \supset \cdots \supset C_c^\infty(\Omega), \quad C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(\Omega)$$

Segue do item **(d)** que o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ tem dimensão infinita. Seus elementos são tipicamente chamados de *funções teste* (em inglês, *bump functions*) *suportadas em* Ω (veja a figura 6 acima).