Radiação térmica

Maxwell, 1873 → ondas eletromagnéticas (teoria)

Corrente alternada ⇒ produção de ondas com comportamento análogo ao da luz (reflexão, refração, difração, interferência, ...)

Hertz, 1887 → comprovação experimental

Luz → ondas eletromagnéticas produzidas por osciladores microscópicos na matéria. Modelo aplicado à transmissão de luz em sólidos, reflexão por metais, etc ...

Ironia: Hertz usava oscilador de faísca. AT aplicada a 2 eletrodos separados por ~1 cm, terminados em esferas polidas.

Polimento dos eletrodos importante para a faísca ⇒ luz UV emitida pela 1ª faísca facilita o processo ⇒ efeito foto-elétrico!

Radiação térmica

Radiação térmica

Sucesso da teoria de Maxwell e do modelo de osciladores: usado na tentativa de explicar a radiação térmica.

Thomas Wedgwood (parente de Darwin, fabricante de louça), 1792: objetos ficam vermelhos à mesma T.

Avanço da espectroscopia ~1850: sólidos $\Rightarrow$ espectro contínuo.

Kirchhoff, 1859: corpo em eq. térmico com a radiação $\Rightarrow$

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = J(\nu, T)$$

$E_\nu \rightarrow$ poder de emissão na frequência ν

$A_\nu \rightarrow$ poder de absorção na frequência ν

Corpo negro $\Rightarrow A_\nu = 1, \forall \nu \Rightarrow E_\nu = J(\nu, T)$

Diferentes corpos negros à mesma $T \Rightarrow$ mesmo espectro.

Absorvedor ideal é também emissor ideal. Ex. 1.2, p. 24 do Eisberg

EXEMPLO 1-2

Suponha que temos dois pequenos corpos opacos separados por uma grande distância, sustentados por fios num grande recipiente onde se fez vácuo, e cujas paredes são opacas e mantidas a temperatura constante. Neste caso, os corpos e as paredes podem trocar energia apenas através de radiação. Seja e a taxa de emissão de energia radiante por um corpo, e seja a a taxa de absorção de energia radiante. Mostre que, no equilíbrio,

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = 1 \tag{1-5}$$

Esta relação, (1-5), é conhecida como a *lei de Kirchhoff para a radiação.*

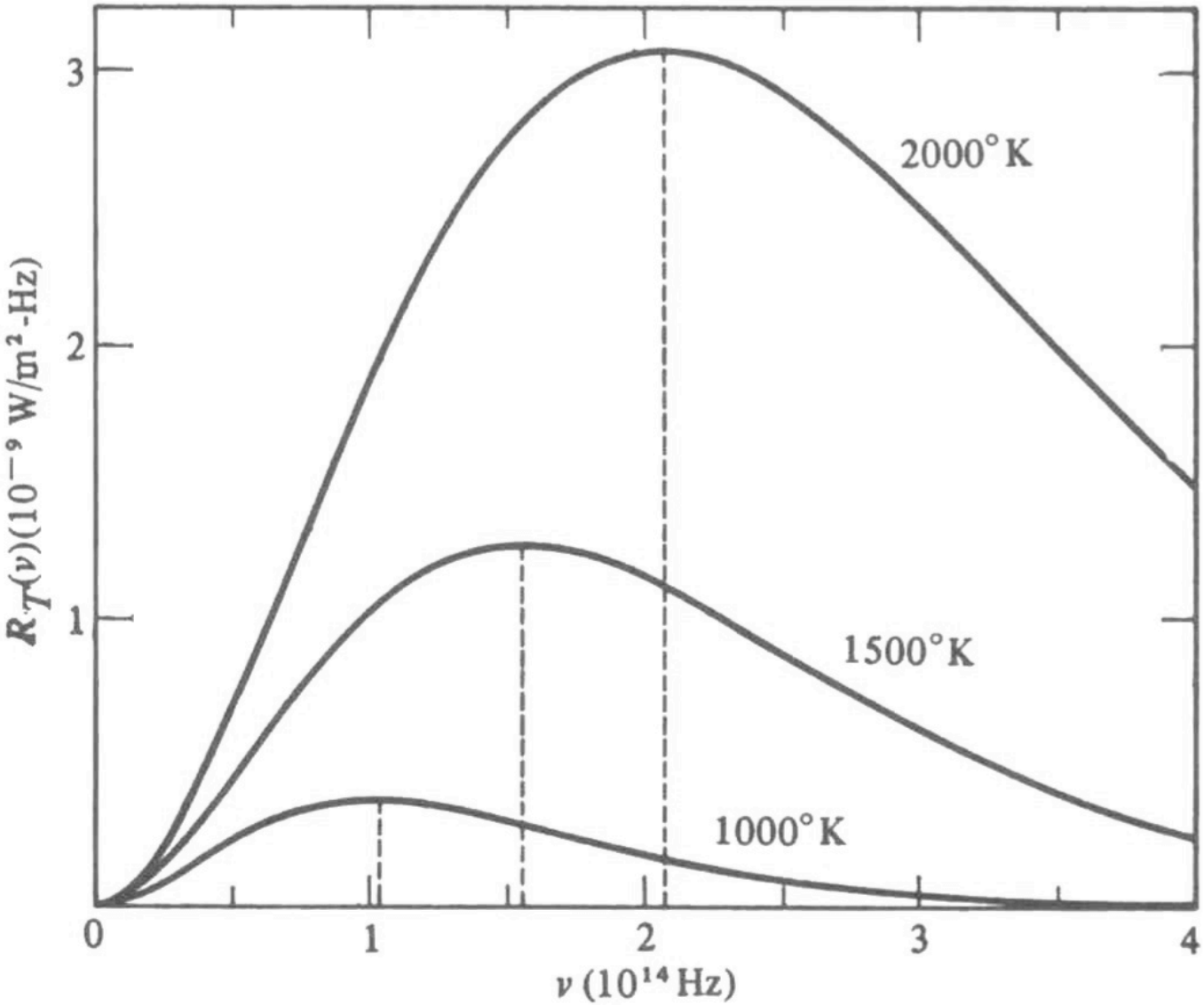
O estado de equilíbrio é tal que a temperatura é constante em todo sistema fechado, e nesse estado a taxa de emissão é necessariamente igual à taxa de absorção para cada corpo. Então

$$e_1 = a_1 \quad \text{e} \quad e_2 = a_2$$

Portanto

$$\frac{e_1}{a_1} = 1 = \frac{e_2}{a_2}$$

Se um corpo, por exemplo, o corpo 2, for um corpo negro, então $a_2 > a_1$, porque um corpo negro absorve melhor do que um que não é um corpo negro. Logo, segue-se de (1-5) que $e_2 > e_1$. Então, o fato observado de que bons absorvedores também são bons emissores é previsto pela lei de Kirchhoff. ▲



Radiância espectral: $R_T(\nu)$ - função de distribuição da potência irradiada, por unidade de área, em um intervalo de frequência, em função de ν e T.

Radiação térmica

Definições:

Radiância espectral: fç de distribuição da potência irradiada, por unidade de área em um intervalo de frequência, em fç de v e T.

Radiância: $R_T = \int_0^\infty R_T(v)dv$ → potência emitida por un. de área

Lei de Stefan (1879): $R_T = \sigma T^4$

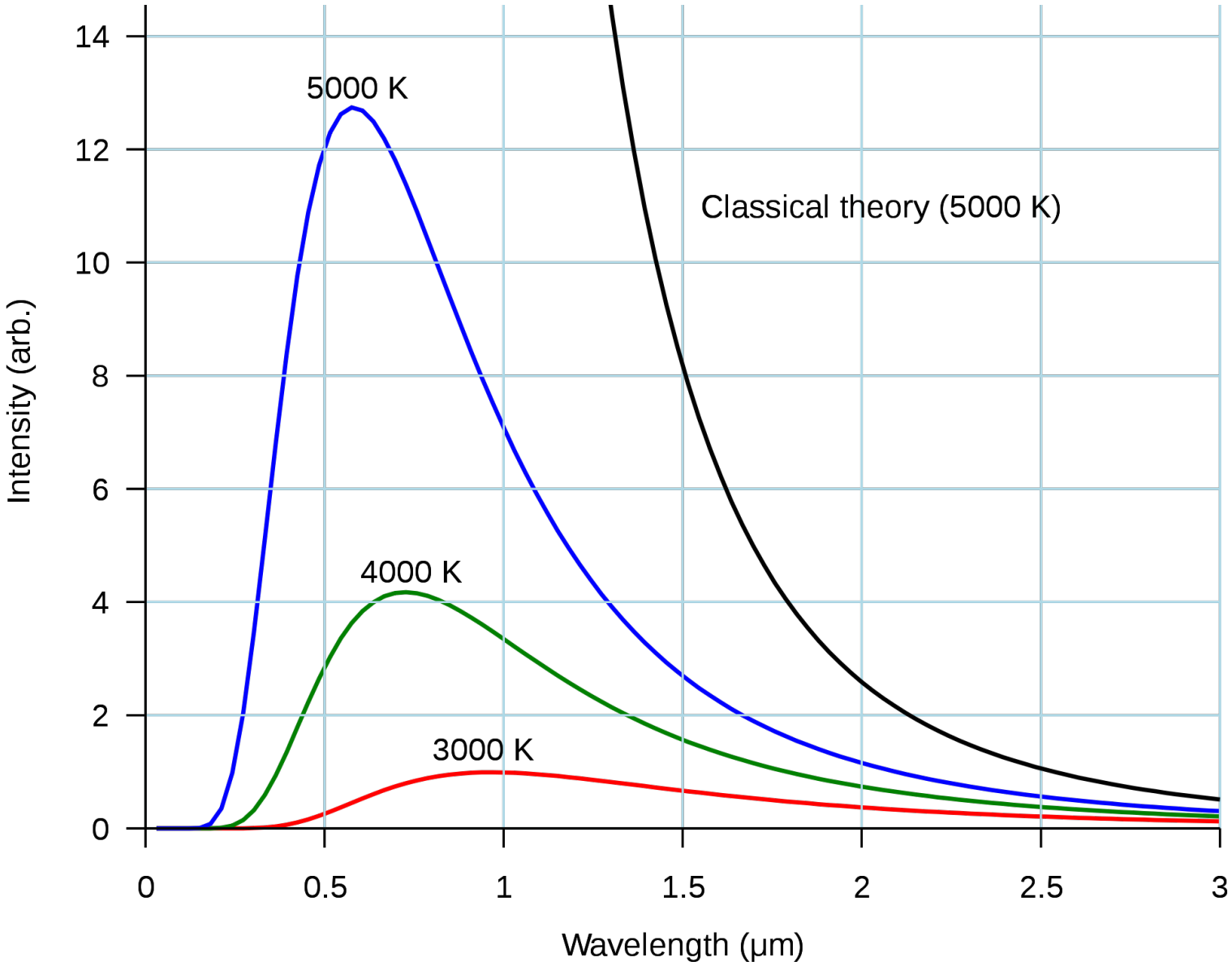
σ = 5,67x10^{-8} W/m^{2}K^4 (const. de Stefan-Boltzmann)

Lei do deslocamento de Wien (1893): $v_{\max} \alpha T$; ou:

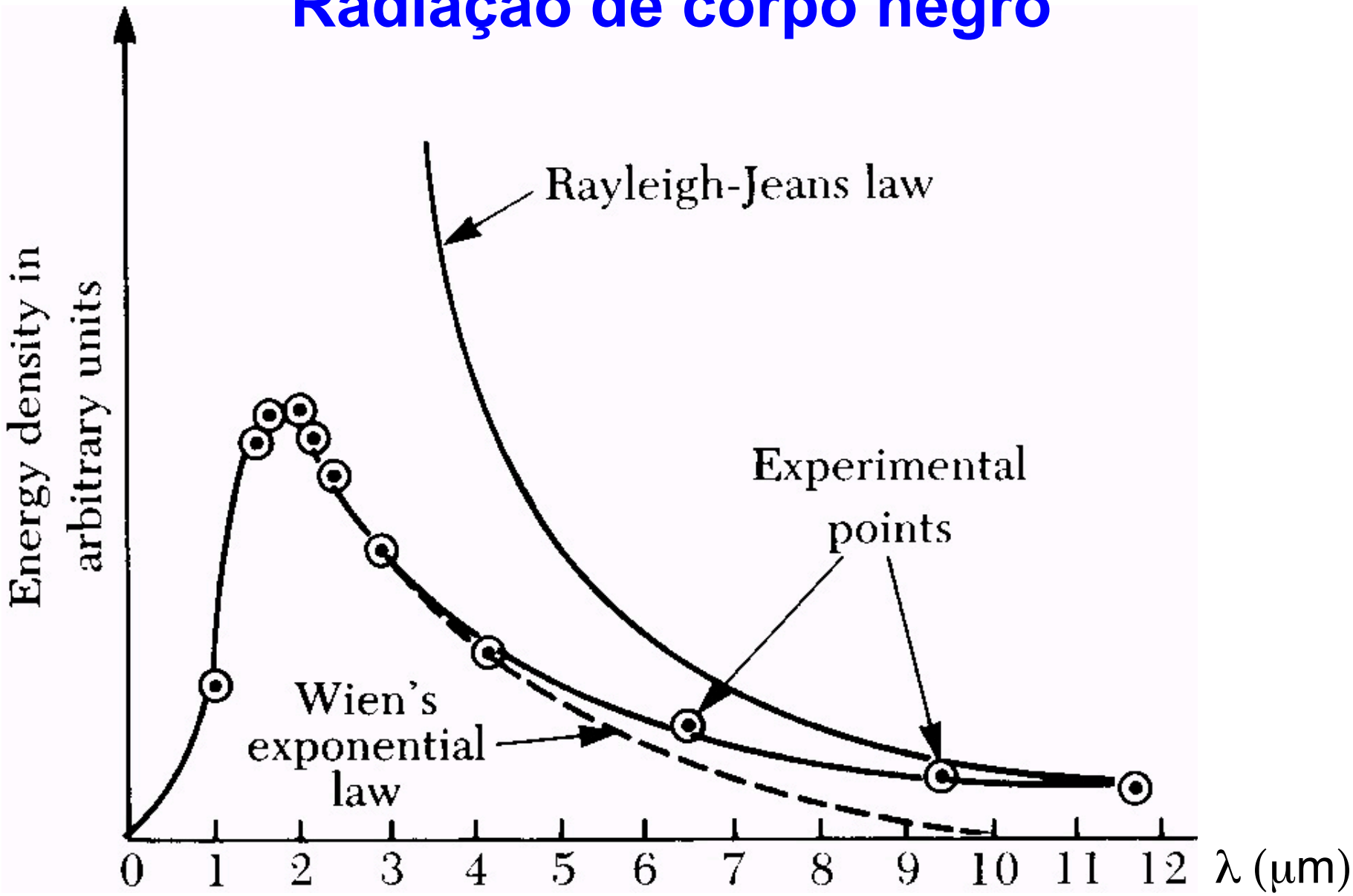
$\lambda_{\max} T = b$, com b = 0,2897756(24) cm.K.

Wien também mostrou que: $u_v = v^3 F(v/T)$

Radiação térmica



Radiação de corpo negro



Radiação de corpo negro

Simulação de corpo negro → cavidade com pequena janela.

$A_{\text{janela}} << A_{\text{cavidade}}$. Assim, radiação que entra não sai.

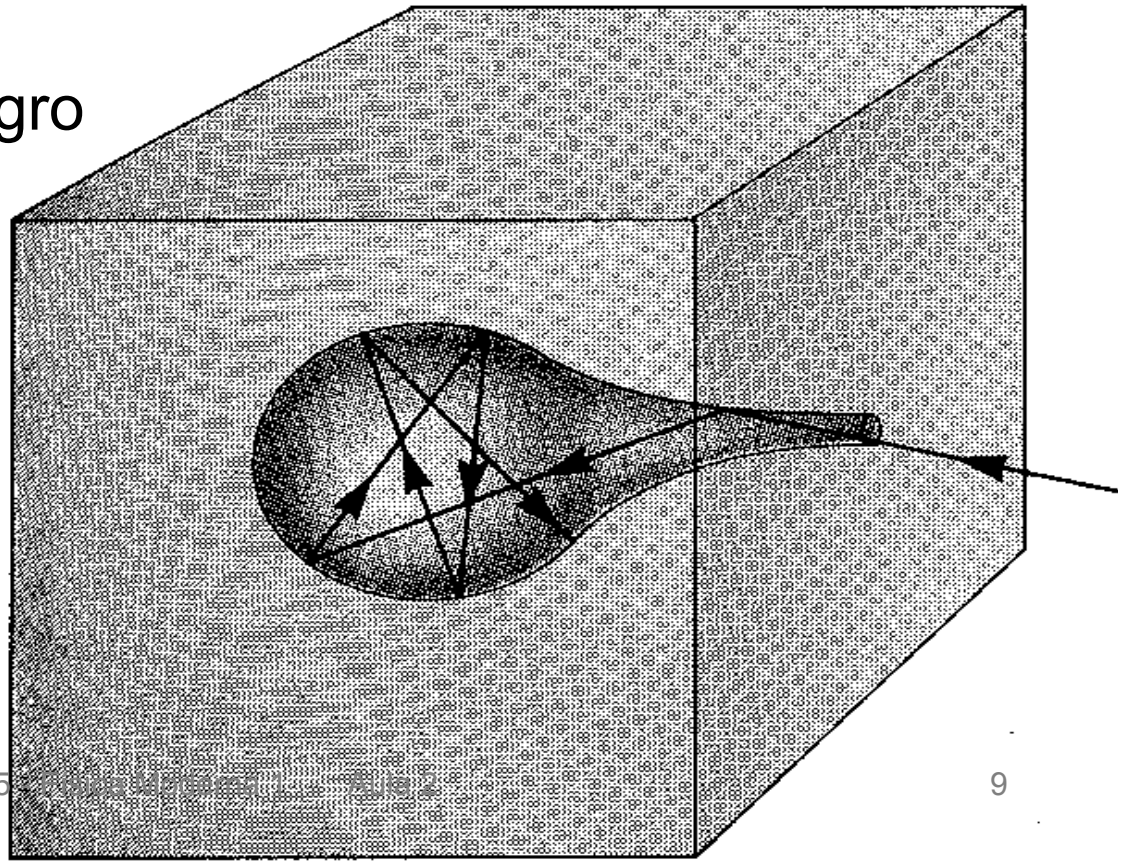
⇒ radiação em equilíbrio térmico com as paredes.

⇒ paredes emitem radiação para a cavidade e peq. fração sai pela janela.

⇒ Mas a janela = corpo negro

⇒ radiação interna =

= radiação de corpo negro.



Densidade de energia na cavidade: $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$

Mais especificamente: $R_T(\nu) = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)$. ?

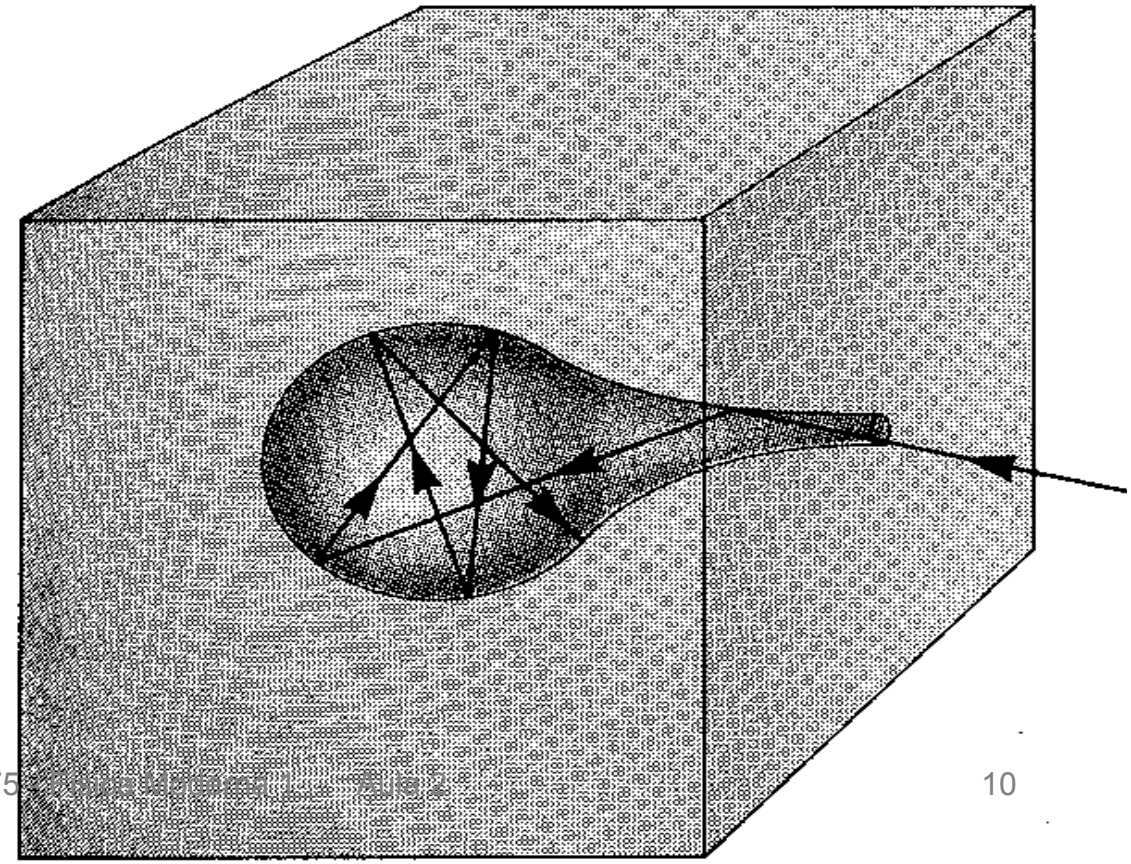
Queremos calcular ρ ⇒

1) Contar o número de modos de oscilação

2) multiplicar pela energia média de cada modo

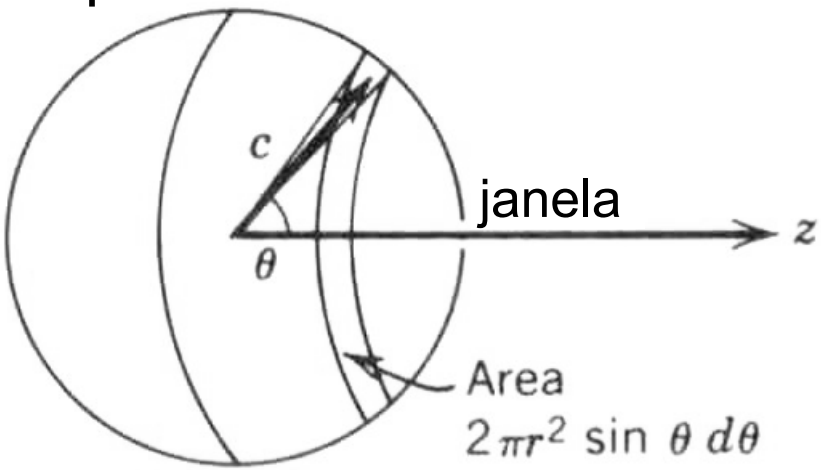
3) dividir pelo volume:

$$\rho_T(\nu) = \frac{N_\nu}{V}\langle\varepsilon\rangle$$



Densidade de energia na cavidade: $R_T(\nu) = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)$

O fator $c/4$ pode ser entendido como o produto de duas contribuições, conforme a figura:

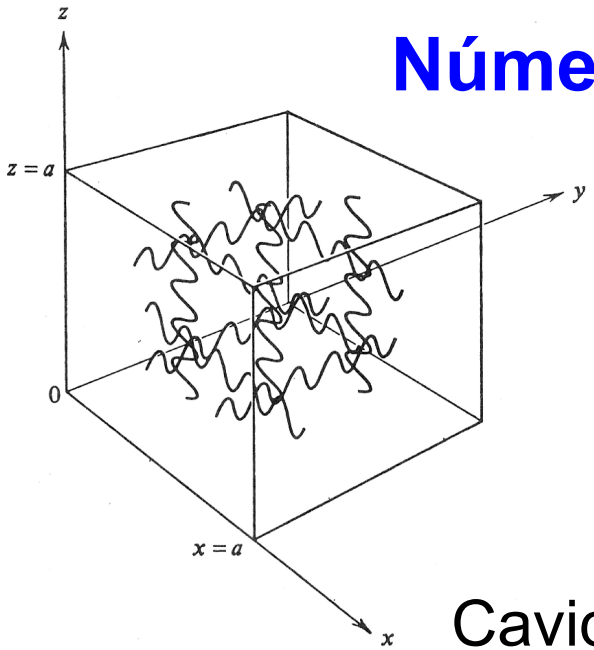


Um fator ½ vem de que só metade da energia das ondas estacionárias na cavidade corresponde a ondas que se movem para a direita.

As ondas que se movem para a direita carregam energia com: $c_z = c\cos\theta$, da qual deve ser feita uma média sobre a semi-esfera:

$$\langle c_z \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} (c\cos\theta) 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta} = \frac{c\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 dx} = \frac{c}{2}$$

Número de modos de oscilação



Eq. de onda (3D):

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

com $\Psi = E_x\,,\,E_y\,,\,E_z$

Cavidade cúbica com paredes metálicas.

Condições de contorno nas interfaces $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ componente de $E_{//}$ deve ser contínua.

Como o material é condutor $\Rightarrow E_{//}=0$. Então:

$E_x = 0$ em $y = 0$ e L e em $z = 0$ e L;

$E_y = 0$ em $x = 0$ e L e em $z = 0$ e L;

$E_z = 0$ em $x = 0$ e L e em $y = 0$ e L.

$$E_x = E_{0x} \cos\frac{n_1 \pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n_2 \pi y}{L} \operatorname{sen}\frac{n_3 \pi z}{L} \operatorname{sen} 2\pi \nu t;$$

$$E_y = E_{0y} \operatorname{sen}\frac{n_1 \pi x}{L} \cos\frac{n_2 \pi y}{L} \operatorname{sen}\frac{n_3 \pi z}{L} \operatorname{sen} 2\pi \nu t;$$

$$E_z = E_{0z} \operatorname{sen}\frac{n_1 \pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n_2 \pi y}{L} \cos\frac{n_3 \pi z}{L} \operatorname{sen} 2\pi \nu t.$$

3 inteiros são necessários para descrever as ondas. As condições de contorno impõem restrições às frequências permitidas. Substituindo na eq. de onda para E_x:

$$-\left[\left(\frac{n_1 \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \pi}{L}\right)^2\right] E_x = -\frac{1}{c^2}(2\pi\nu)^2 E_x$$

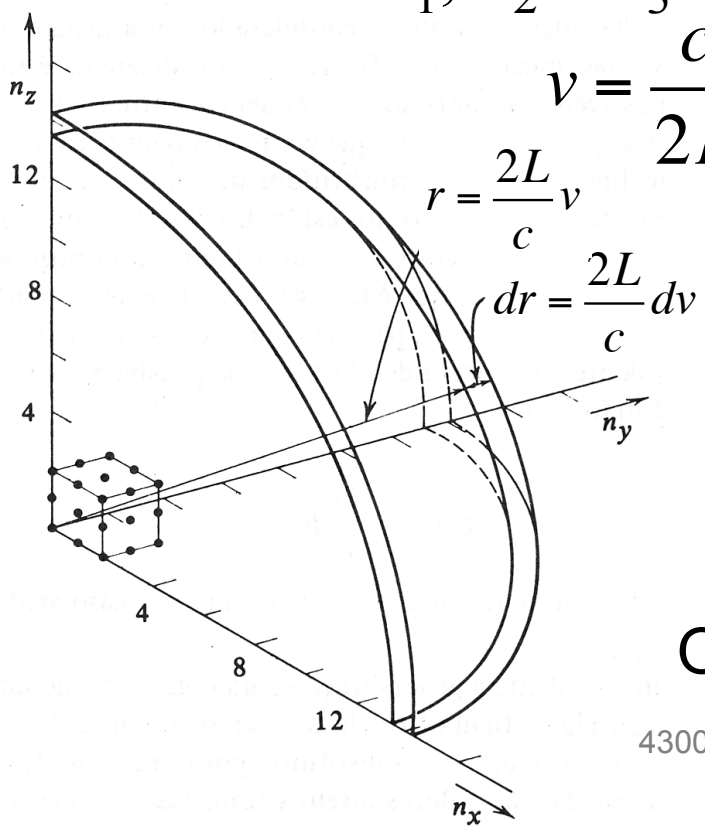
com n_1 , n_2 e n_3 inteiros.

As frequências permitidas são dadas por: $\nu = \dfrac{c}{2L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

Contagem do número de modos de oscilação

A cada conjunto de 3 inteiros (1,1,1), ou (1,2,3), ..., é associada uma frequência e uma configuração espacial da onda estacionária.

O jeito mais simples de contabilizar os vários modos é utilizando um espaço 3D cujos eixos ortogonais correspondem às variáveis n_1, n_2 e n_3.



$$v = \frac{c}{2L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \Rightarrow \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{2L}{c}v$$

Definindo:

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \Rightarrow r^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{2L}{c}v \Rightarrow dr = \frac{2L}{c}dv$$

O volume da casca esférica é dado por:

$$\frac{1}{8}4\pi r^2 dr = \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{2L}{c}v\right)^2 \frac{2L}{c}dv = \frac{4\pi v^2}{c^3}Vdv,$$ com $V = L^3$.

Assim, o número de modos pode ser obtido: $N_v = \frac{8\pi v^2}{c^3}V$

O fator 2 se deve ao fato de que cada onda tem 2 estados de polarização independentes.

Já temos um dos fatores para a determinação da densidade espectral de energia. Falta agora determinar a energia média por modo.

Vamos começar pelo cálculo clássico da energia média, que sabemos não funcionar. Mas é importante, pois abre o caminho para o modelo de Planck.

Energia média por modo de oscilação

Queremos determinar a energia média de uma população de ondas eletromagnéticas com muitos modos de oscilação, cada um com sua energia.

Os campos e.m. estão em equilíbrio com as paredes da cavidade, que está em T. Assim, a radiação troca energia com as muitas partículas que compõem as paredes.

A Mecânica Estatística desenvolveu as ferramentas necessárias para fazer médias sobre números muito grandes de partículas, de forma a determinar propriedades gerais do sistema e valores médios de algumas propriedades associadas às partículas.

Energia média por modo de oscilação

A teoria cinética dos gases é um exemplo desse processo.

Num gás em temperatura T, a cada um dos 3 graus de liberdade de movimento linear das partículas está associada uma energia cinética média de ½ $k_B T$.

Consideremos um elétron ligado a um átomo da parede da cavidade. Elétrons oscilam ao absorver ondas e.m. e emitem ondas e.m. ao oscilar. Podemos usar o resultado acima para um elétron da parede se lembrarmos que um oscilador, além de energia cinética, tem também energia potencial.

Num OHS, os valores médios dessas 2 energias são iguais.

Assim, obtemos um valor de $k_B T$ para a energia média total, para cada grau de liberdade de oscilação linear de um elétron na parede à temperatura T.

Energia média por modo de oscilação

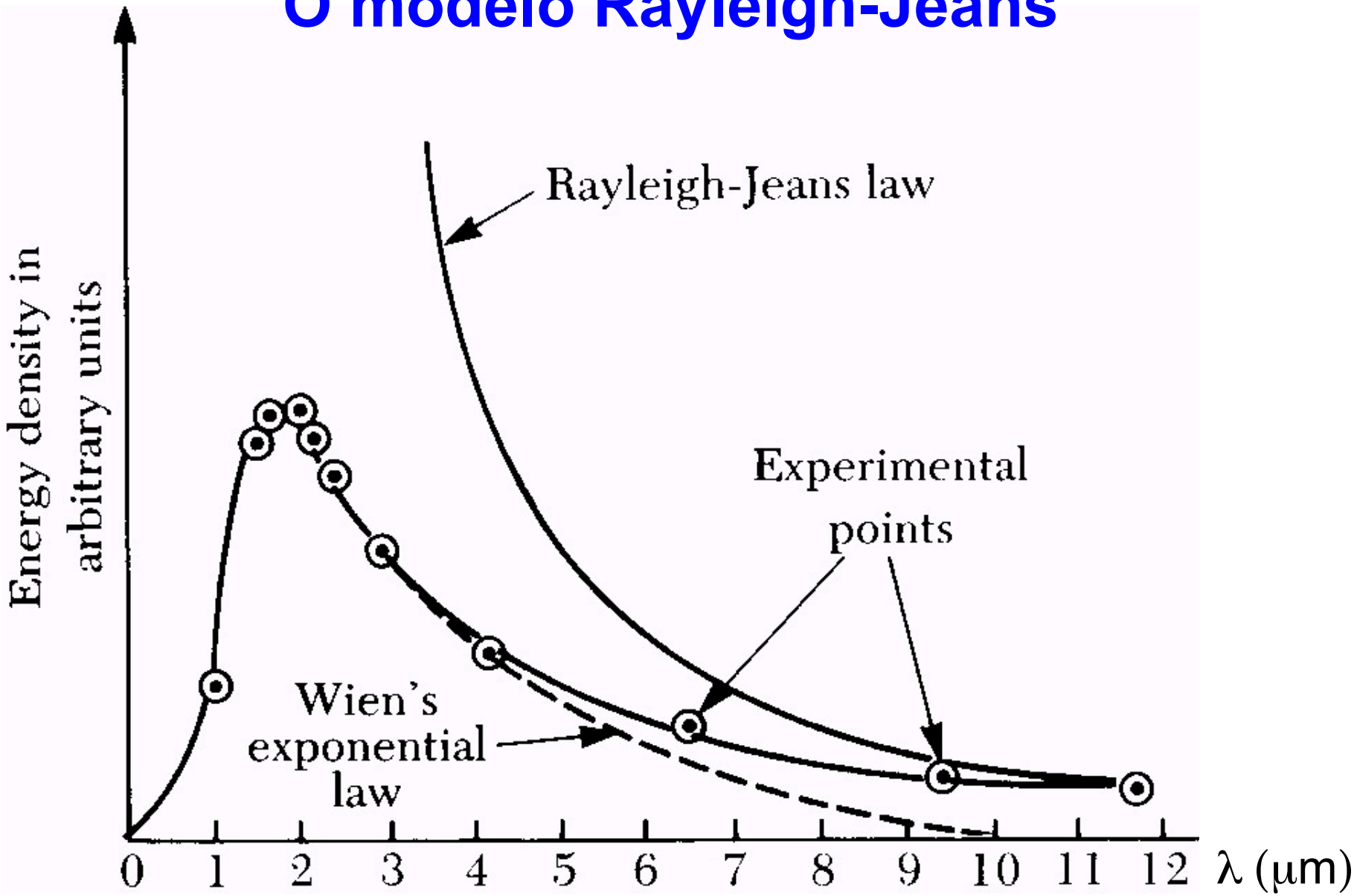
Voltando à nossa cavidade, podemos transferir a energia média obtida para os elétrons das paredes para a radiação presente na cavidade, uma vez que o equilíbrio térmico entre eles se dá pela absorção e emissão de radiação pelos elétrons das paredes.

Assim, igualamos a energia média, por grau de liberdade, de um elétron da parede com a energia média por modo de oscilação da radiação: $\langle \varepsilon \rangle = k_B T$

Podemos, então, escrever a expressão para a densidade espectral de energia:

$$\rho_T(\nu) = \frac{N_\nu}{V}\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V}\frac{8\pi\nu^2}{c^3} V k_B T = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

O modelo Rayleigh-Jeans



O modelo de Planck

Modelo clássico: contar o nº de ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$, multiplicar por $\langle\varepsilon\rangle$ e dividir pelo volume.

Equipartição de energia $\Rightarrow \langle\varepsilon\rangle = kT$

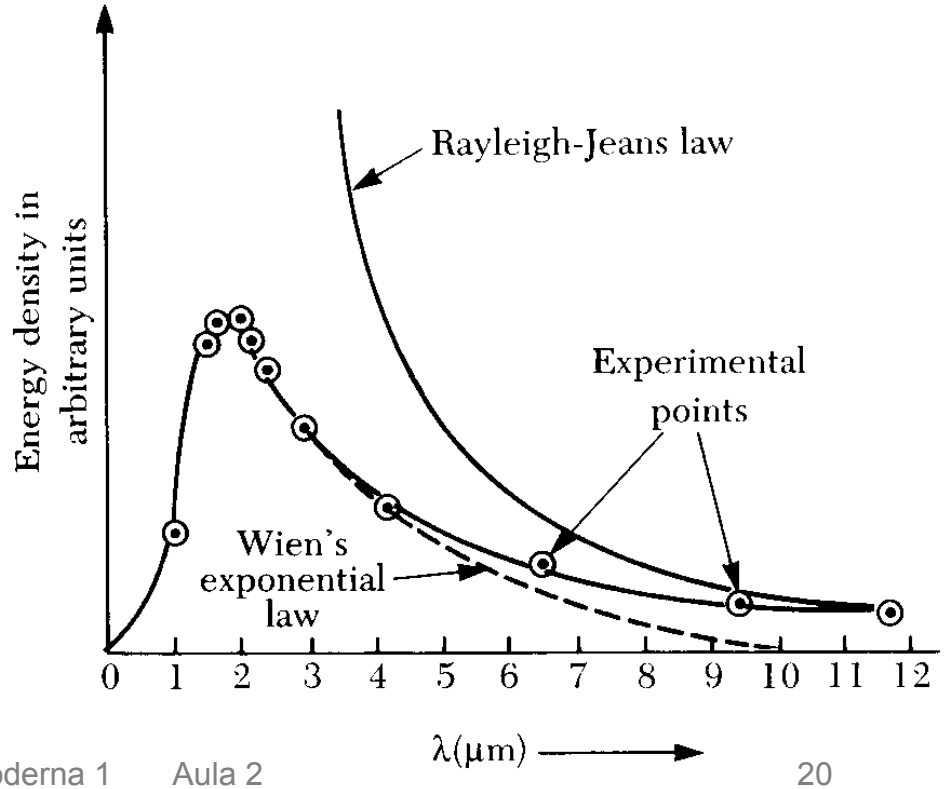
Planck notou que: Rayleigh-Jeans OK para $\nu \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle\varepsilon\rangle = kT$ também OK (nesse limite).

Mas notou também que, para $\nu \to \infty \Rightarrow \langle\varepsilon\rangle \to 0$

A solução de Planck baseia-se num valor de $\langle\varepsilon\rangle$ radicalmente diferente de kT.

Parênteses para distribuições



Distribuição de Boltzmann

Descrição de um sistema clássico com um número grande de partículas idênticas, cada uma rotulada de forma que podemos saber sua energia. As energias, no entanto, mudam a todo momento, devido aos choques entre as partículas.

A energia média das partículas depende da temperatura T, sendo que o sistema apresenta uma determinada distribuição de energia de partículas para uma dada T.

Precisamos saber como uma dada energia total E do sistema é distribuída entre N partículas idênticas quando o sistema está em equilíbrio termodinâmico.

Sistema: número muito grande de células, cada uma com uma energia definida, para as quais as partículas são designadas.

Distribuição de Boltzmann

As células são identificadas por um índice i (inteiro). A diferença de energia entre as células pode ser feita tão pequena quanto necessário.

Assim, se a i-ésima célula está associada às partículas com energia ε_i, o que queremos é determinar n_i, o número de partículas nesta célula, quando o sistema está em equilíbrio térmico à temperatura T.

A população das várias células nos dá uma indicação da probabilidade de uma determinada energia de partícula existir no sistema. A física clássica nos permite identificar e seguir a história de cada uma das N partículas idênticas do sistema.

Essa especificação completa do sistema é chamada de **microestado**.

Distribuição de Boltzmann

Essa descrição detalhada é desnecessariamente completa, uma vez que diferentes microestados são fisicamente equivalentes se as populações das células forem as mesmas, independentemente da identificação das partículas.

Assim, vamos adotar um método menos específico, no qual listamos apenas o número de partículas em cada célula: n_1 partículas com energia ε_1, n_2 com energia ε_2, ... Com este método podemos gerar uma lista de números de ocupação, para a distribuição de N partículas em r células.

Esta lista (n_1, n_2, ..., n_r) define um **macroestado** do sistema.

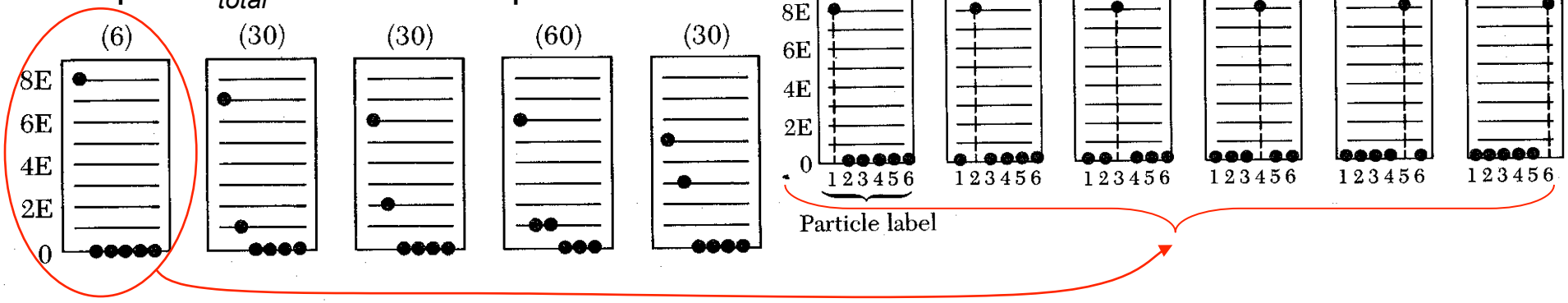
Distribuição de Boltzmann

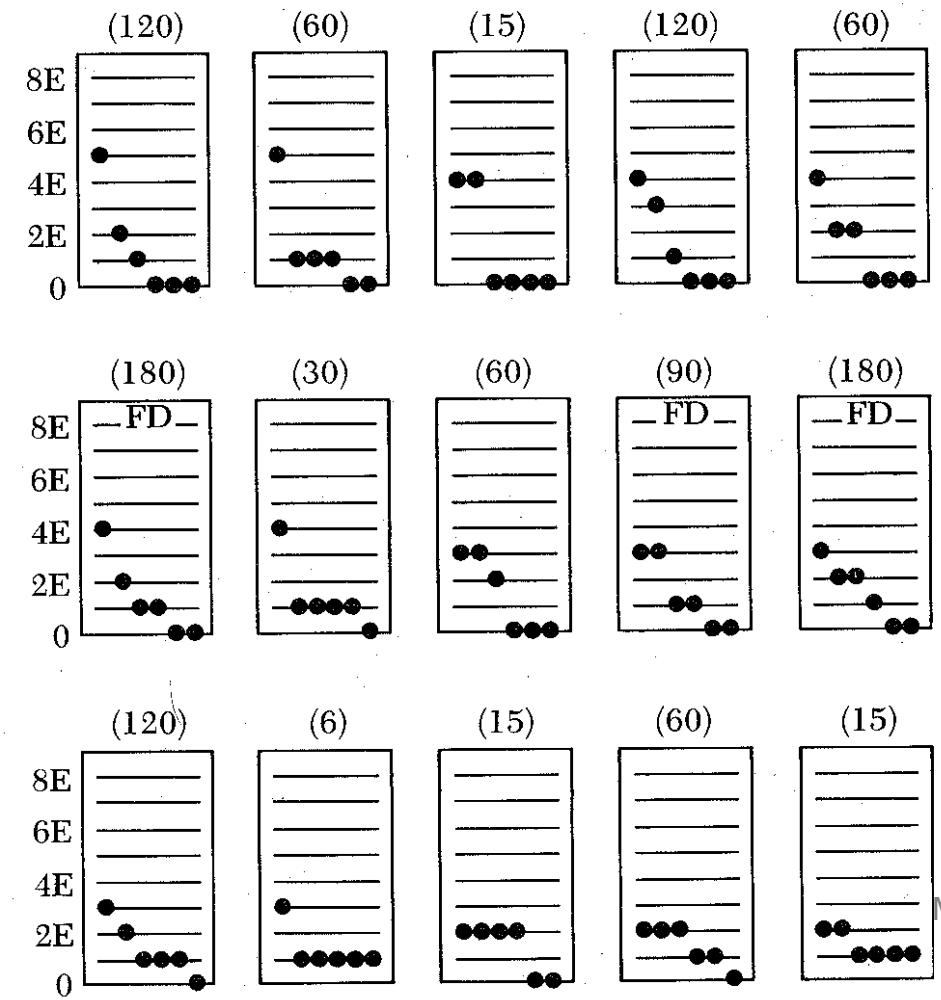
Percebe-se que um único macroestado pode estar associado a muitos microestados diferentes. A multiplicidade de microestados que formam um macroestado é uma medida da probabilidade de se encontrar uma determinada configuração.

Se um número grande de microestados gera um mesmo macroestado (mesma distribuição de ocupação), então este macroestado deve ter uma probabilidade alta de ser encontrado.

Exemplo concreto: sistema com 6 partículas, energia total $8E$, distribuída em células com energia E.

Exemplo: $E_{total} = 8E$ $N = 6$ partículas





Número de microestados em cada macroestado:

$$W_N = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\ldots}$$

Número médio de partículas com uma determinada energia:

$$\bar{n}_j = n_{j_1}p_1 + n_{j_2}p_2 + \ldots$$

Número total de micro-estados: 1287. Podemos, então, calcular o número médio de partículas com energia nula:

Parênteses combinatório

Queremos uma expressão para o número de microestados correspondentes a um macroestado definido por uma ocupação (n_1, n_2, ..., n_r). Esse número é definido por $W_N(n_1, n_2, ..., n_r)$ e é chamado de probabilidade termodinâmica do macroestado.

Começamos com o número de permutações de N objetos:

$N(N\text{-}1)(N\text{-}2) \ldots = N!$

Assim, o número de formas distintas de distribuir N partículas para que n_1 estejam na célula 1 e as outras não estejam na célula 1 é:

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

Agora temos (N-n_1) partículas sobrando. Queremos distribuí-las de tal forma que n_2 estejam na célula 2 e o resto nem na célula 1 nem na 2.

Parênteses combinatório (final)

Usando o mesmo argumento anterior, isso dá:

$$\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$$

E continuamos o processo até que todas as N partículas estejam distribuídas nas r células. O número total vai ser dado pelo produto de r fatores:

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(N-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!(N-n_1-\cdots-n_r)!}$$

Este produto pode ser simplificado, usando o fato de que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = N$, (a definição de que 0! = 1 também é usada), resultando em:

$$W_N = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\ldots}$$

Voltar para o slide 25

$$\bar{n}_0 = (5)(6/1287) + (4)(30/1287) + (4)(30/1287) + (3)(60/1287)$$
$$+ (4)(30/1287) + (3)(120/1287) + (2)(60/1287) + (4)(15/1287)$$
$$+ (3)(120/1287) + (3)(60/1287) + (2)(180/1287) + (1)(30/1287)$$
$$+ (3)(60/1287) + (2)(90/1287) + (2)(180/1287) + (1)(120/1287)$$
$$+ (0)(6/1287) + (2)(15/1287) + (1)(60/1287) + (0)(15/1287)$$
$$= 2{,}307$$

Boltzmann: $P(\varepsilon_i) = Ae^{-\varepsilon_i/kT} = Ae^{-\beta\varepsilon_i}$

Analogamente:

$\bar{n}_1 = 1{,}54$

$\bar{n}_2 = 1{,}00$

$\bar{n}_3 = 0{,}587$

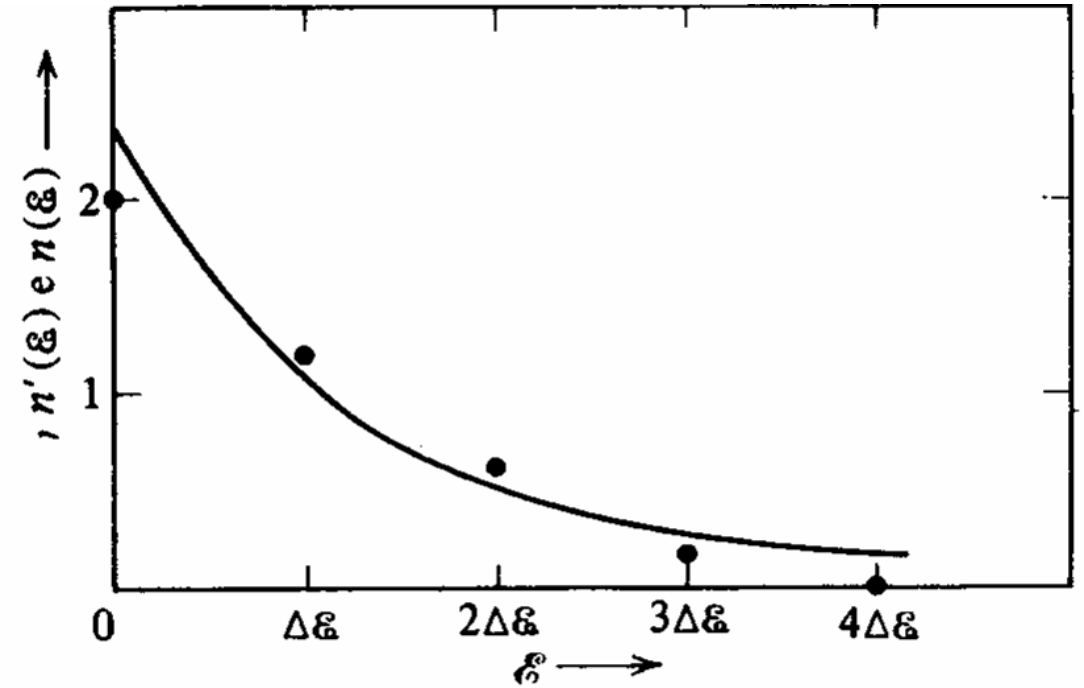
$\bar{n}_4 = 0{,}326$

$\bar{n}_5 = 0{,}163$

$\bar{n}_6 = 0{,}0699$

$\bar{n}_7 = 0{,}0233$

$\bar{n}_8 = 0{,}00466$



O modelo de Planck

Modelo clássico: contar o nº de ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$, multiplicar por $\langle\varepsilon\rangle$ e dividir pelo volume.

Equipartição de energia $\Rightarrow \langle\varepsilon\rangle = kT$

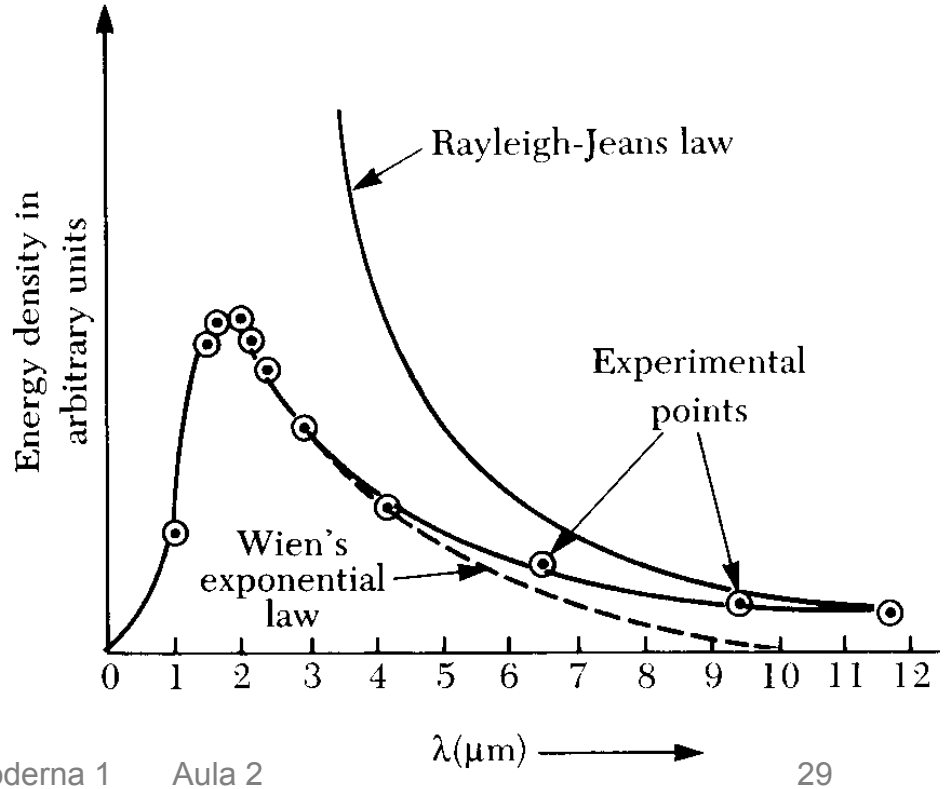
Planck notou que: Rayleigh-Jeans OK para $\nu \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle\varepsilon\rangle = kT$ também OK (nesse limite).

Mas notou também que, para $\nu \to \infty \Rightarrow \langle\varepsilon\rangle \to 0$

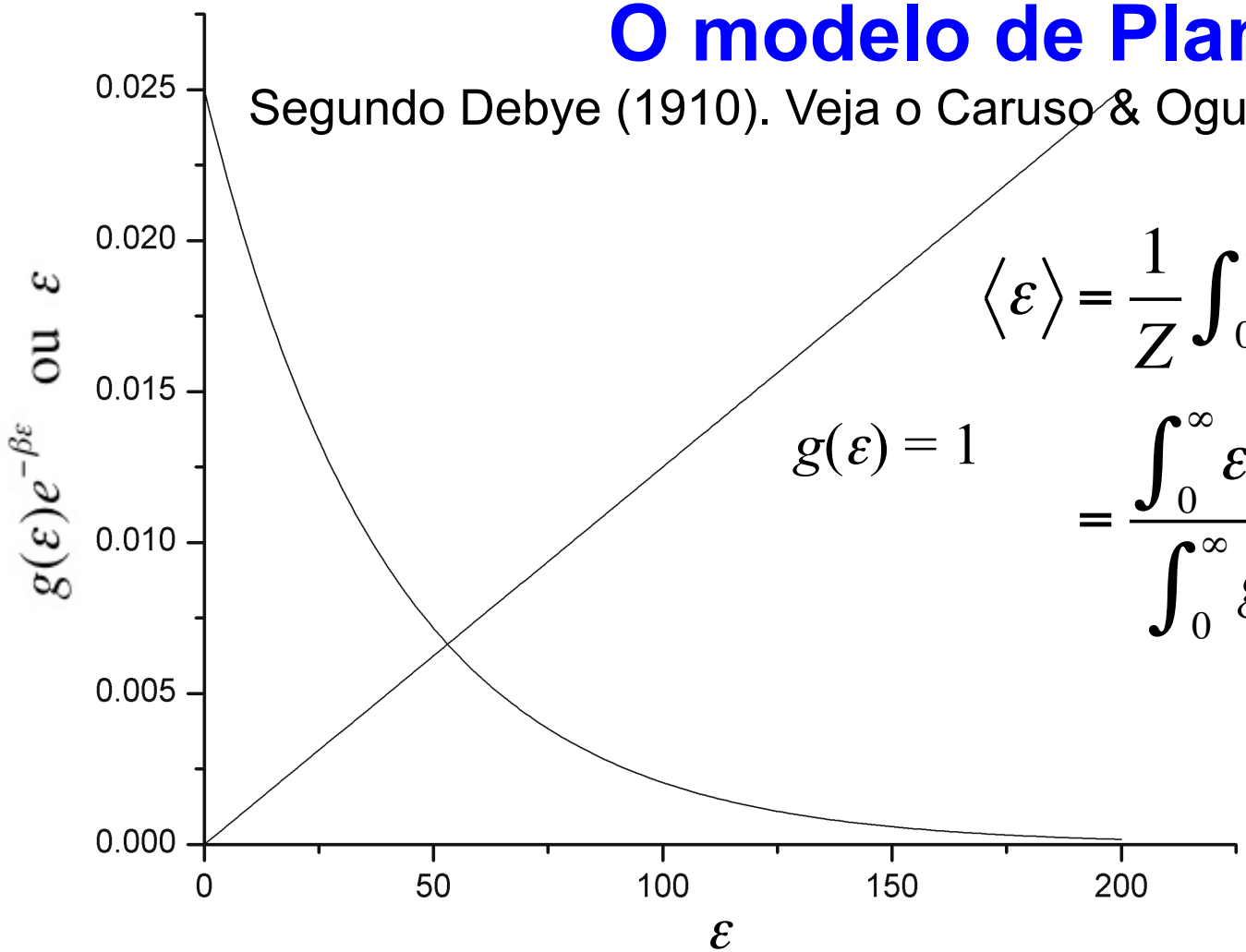
A solução de Planck baseia-se num valor de $\langle\varepsilon\rangle$ radicalmente diferente de kT.

Parênteses para distribuições



O modelo de Planck

Segundo Debye (1910). Veja o Caruso & Oguri, Cap. 10.2, pg. 309.



$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{Z}\int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon =$$

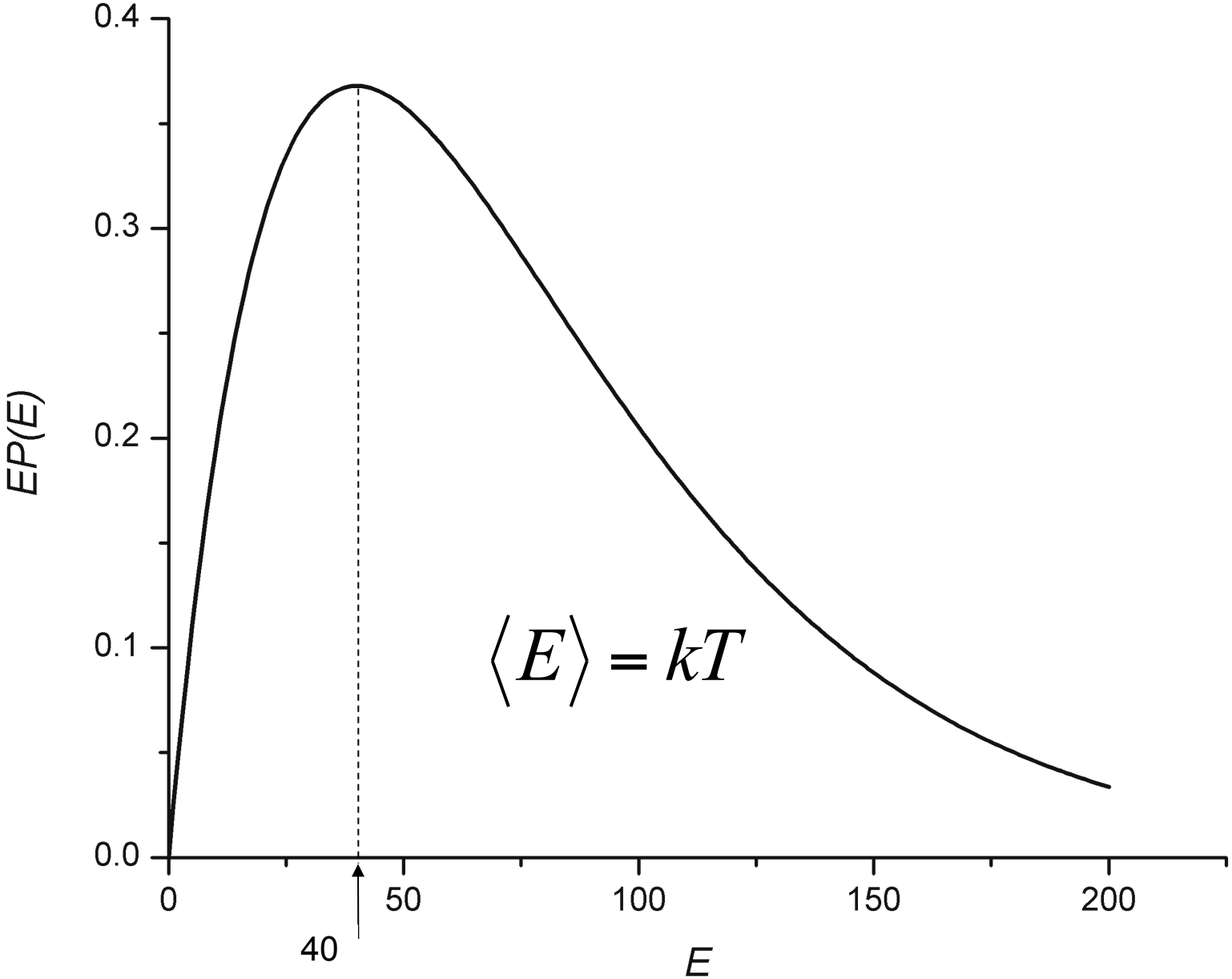
$$g(\varepsilon) = 1$$

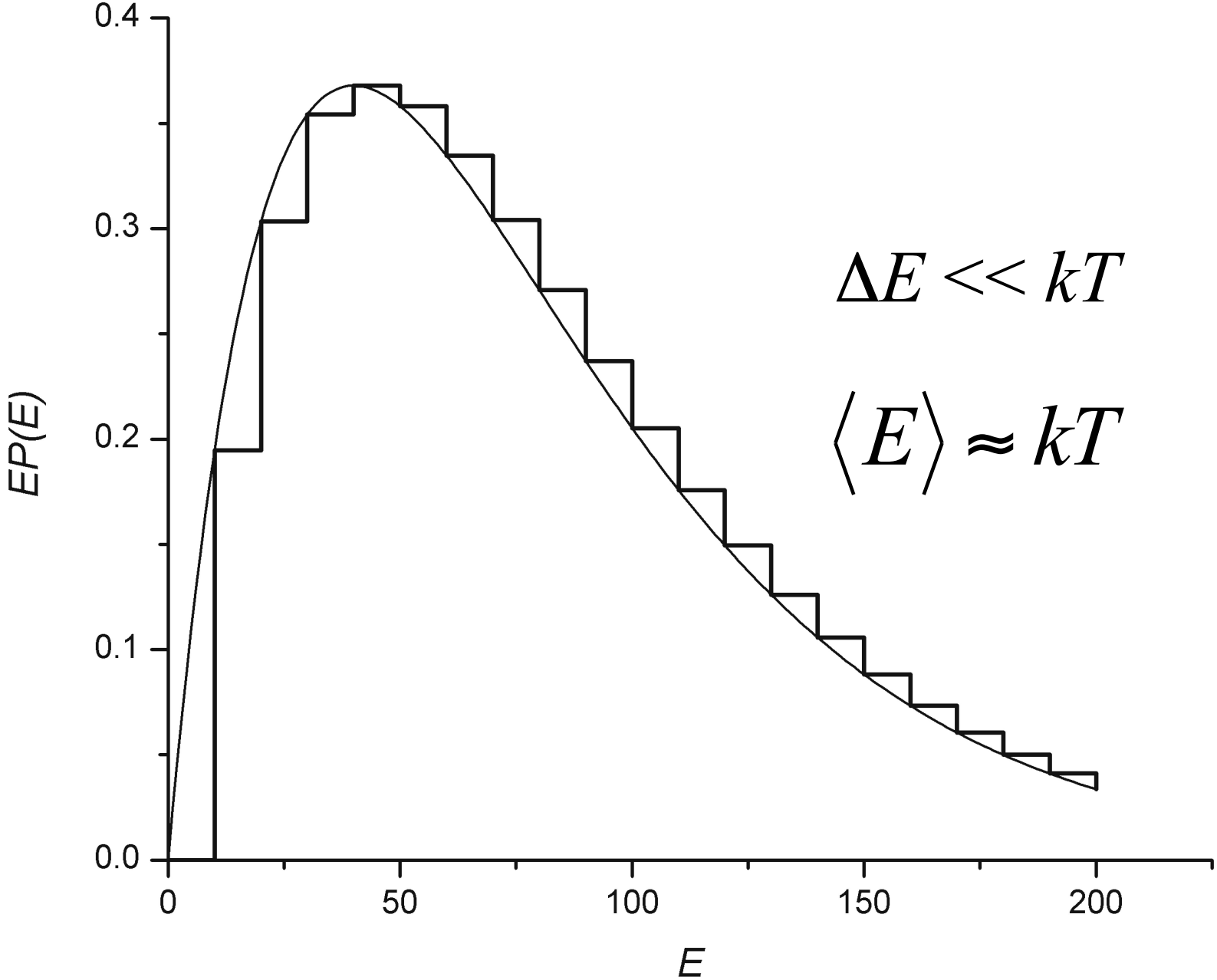
$$= \frac{\int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon}{\int_0^\infty g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon} = kT$$

Planck notou que: Rayleigh-Jeans OK para $\nu \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = kT$ também OK (nesse limite).

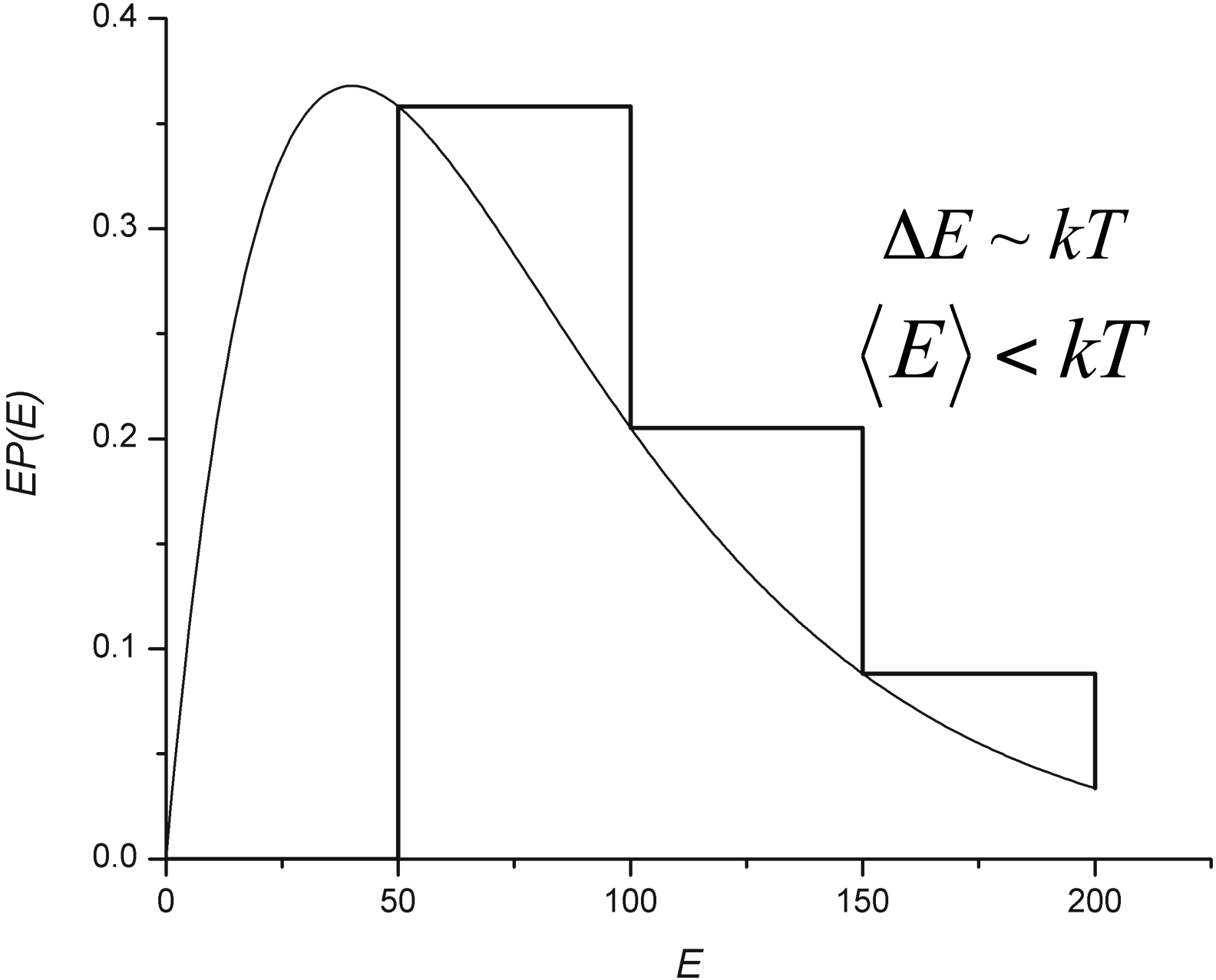
Mas notou também que, para $\nu \to \infty \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle \to 0$


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
EP(E)
0
50
100
150
200
40
E
$\langle E \rangle = kT$



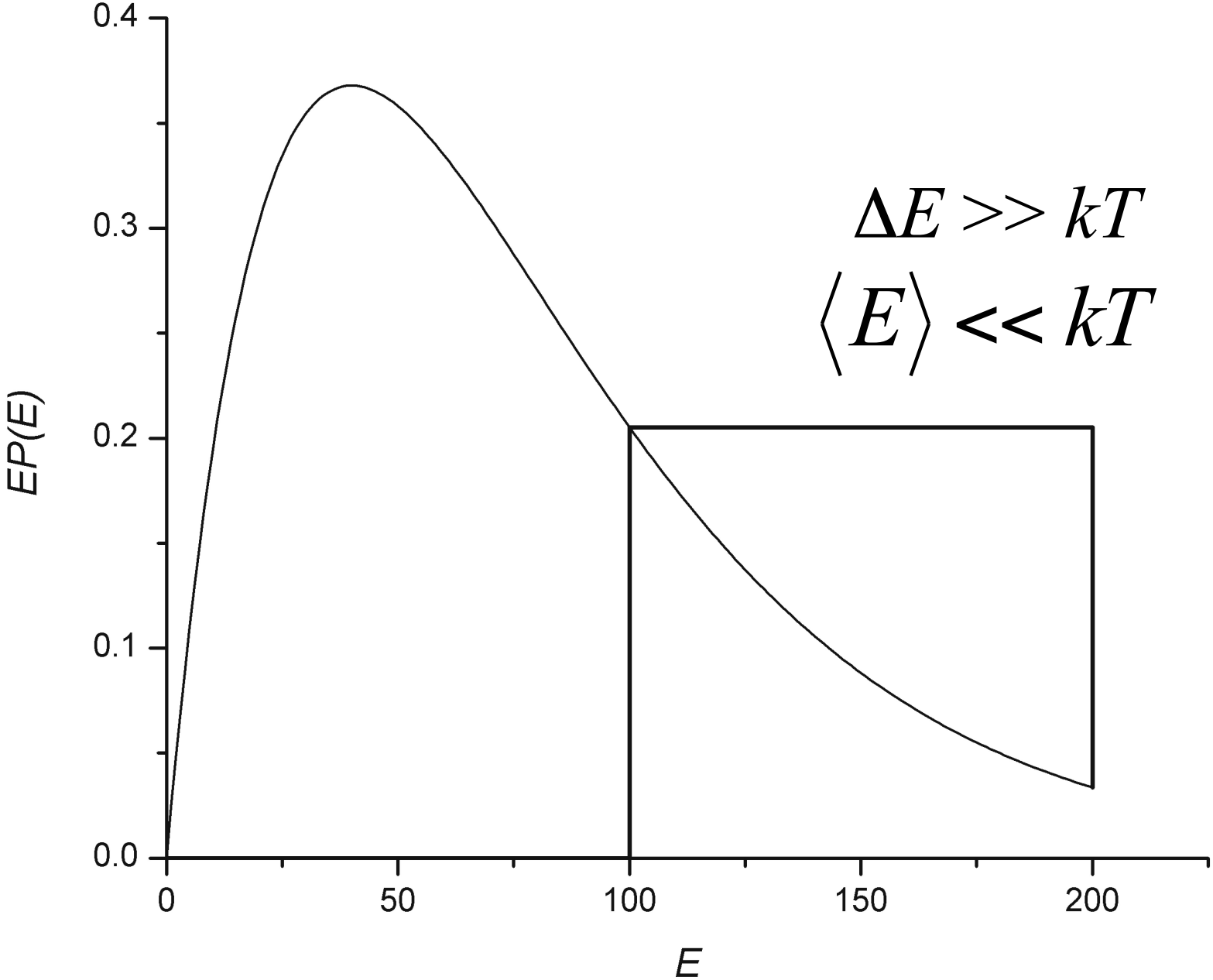
$$\Delta E << kT$$

$$\langle E \rangle \approx kT$$



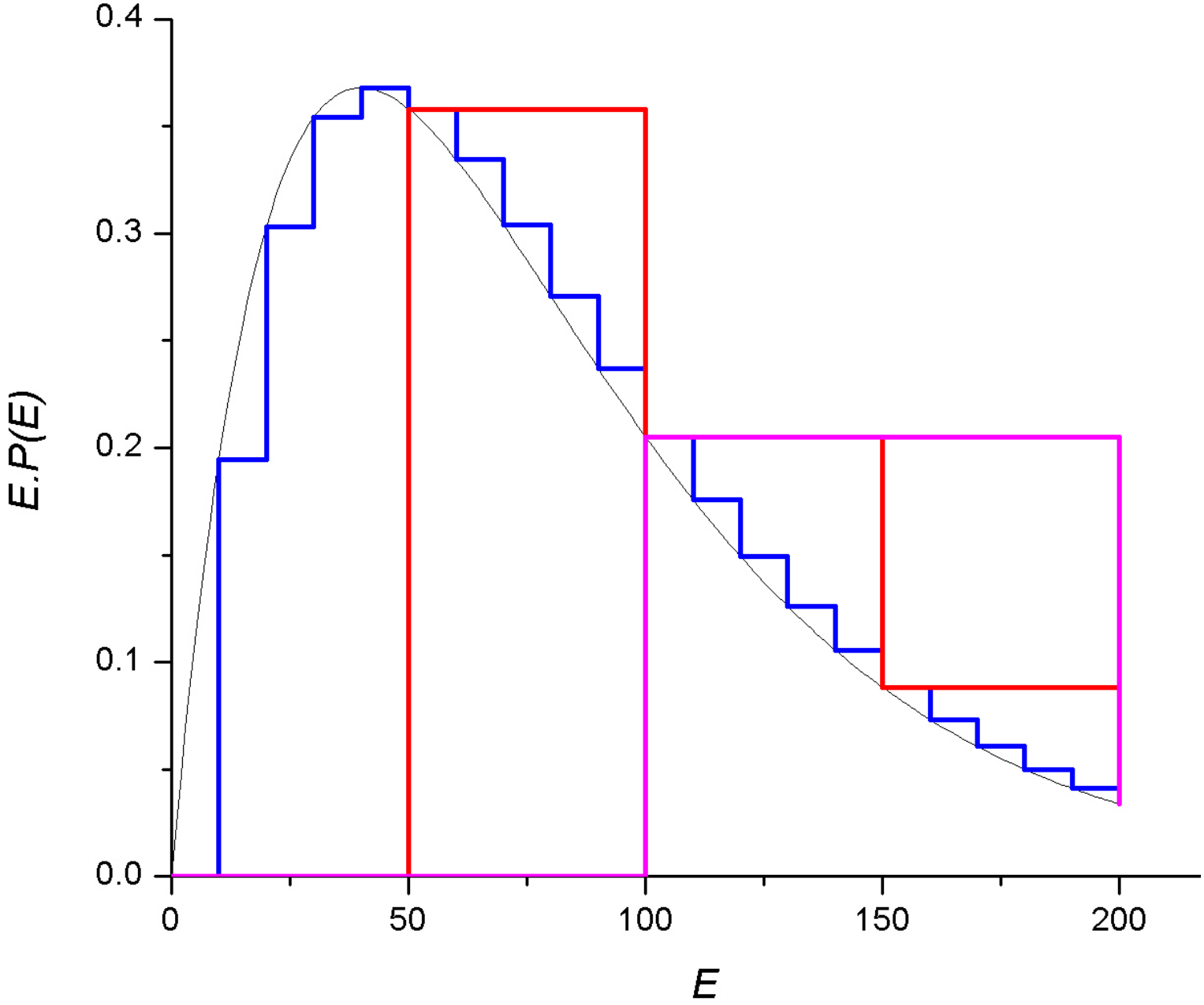
$$\Delta E \sim kT$$

$$\langle E \rangle < kT$$



$$\Delta E >> kT$$

$$\langle E \rangle << kT$$


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
E.P(E)
0
50
100
150
200
E

O modelo de Planck

$$\left.\begin{array}{l}\langle\varepsilon\rangle \sim kT \text{ para } \Delta E \text{ pequeno } (\nu \to 0) \\ \langle\varepsilon\rangle \sim 0 \text{ para } \Delta E \text{ grande } (\nu \to \infty)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E \propto \nu \Rightarrow \Delta E = h\nu$$

com h = 6,63x10^{-34} J.s (constante de Planck).

De quebra determinou também a constante de Boltzmann:

k = 1,38 x 10^{-23} J/K

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_n e^{-\varepsilon_n/kT}} = \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}}{Z}$$

Mas $\varepsilon_n = nh\nu$. Assim, $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{\sum_n nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_n e^{-nh\nu/kT}} = kT\dfrac{\sum_n nxe^{-nx/kT}}{\sum_n e^{-nx/kT}}$,

com $x = \dfrac{h\nu}{kT}$

O modelo de Planck

Então, a função de partição é dada por uma soma:

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots$$

Que é uma série geométrica com razão e^{-x} , cuja soma é:

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Devemos notar que o numerador da expressão que precisamos calcular pode ser escrito como:

$$\sum_n nxe^{-nx/kT} = -x\frac{d}{dx}Z(x) = -x\frac{d}{dx}\sum_n e^{-nx} = x\sum_n ne^{-nx}$$

Voltando à expressão para o valor médio da energia:

O modelo de Planck

$$\langle \varepsilon \rangle = kT \frac{\sum_n nxe^{-nx/kT}}{\sum_n e^{-nx/kT}} = -\frac{kT}{Z(x)} x \frac{d}{dx} Z(x) = -kTx \frac{d}{dx} \ln Z(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = -kTx \frac{d}{dx} \ln(1 - e^{-x}) = kTx \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{kTx}{e^{x} - 1}$$

Substituindo $x = \dfrac{h\nu}{kT}$, obtemos:

$\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$, que apresenta os comportamentos esperados:

$$e^{h\nu/kT} \xrightarrow{h\nu/kT \to 0} 1 + h\nu/kT \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle \to kT$$

$$e^{h\nu/kT} \xrightarrow{h\nu/kT \to \infty} \infty \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle \to 0$$

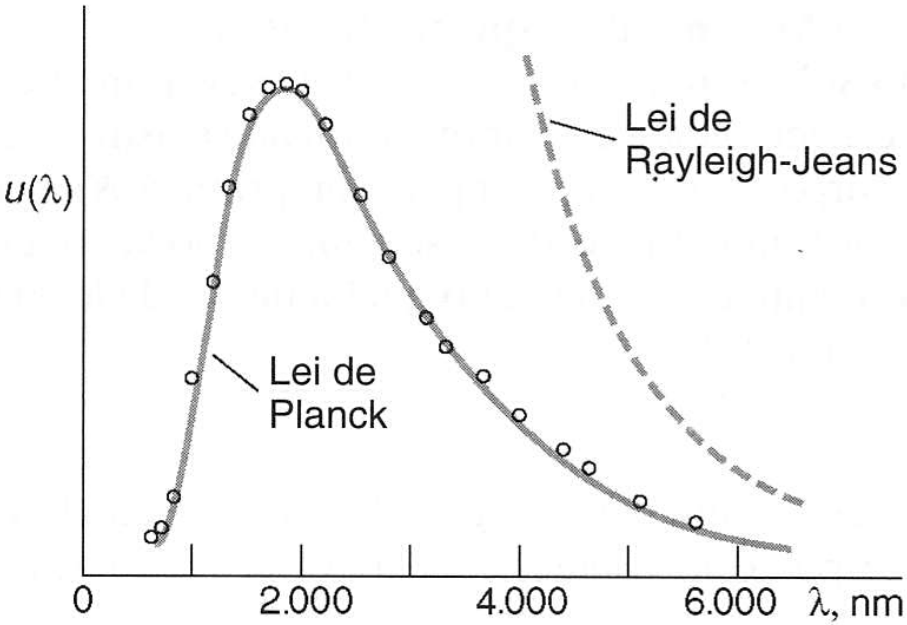
O modelo de Planck

E a densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda fica assim:

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda \quad \text{e} \quad \rho_T(\lambda) = -\rho_T(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} = \rho_T(\nu)\frac{c}{\lambda^2}$$

$$\therefore \ \rho_T(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$



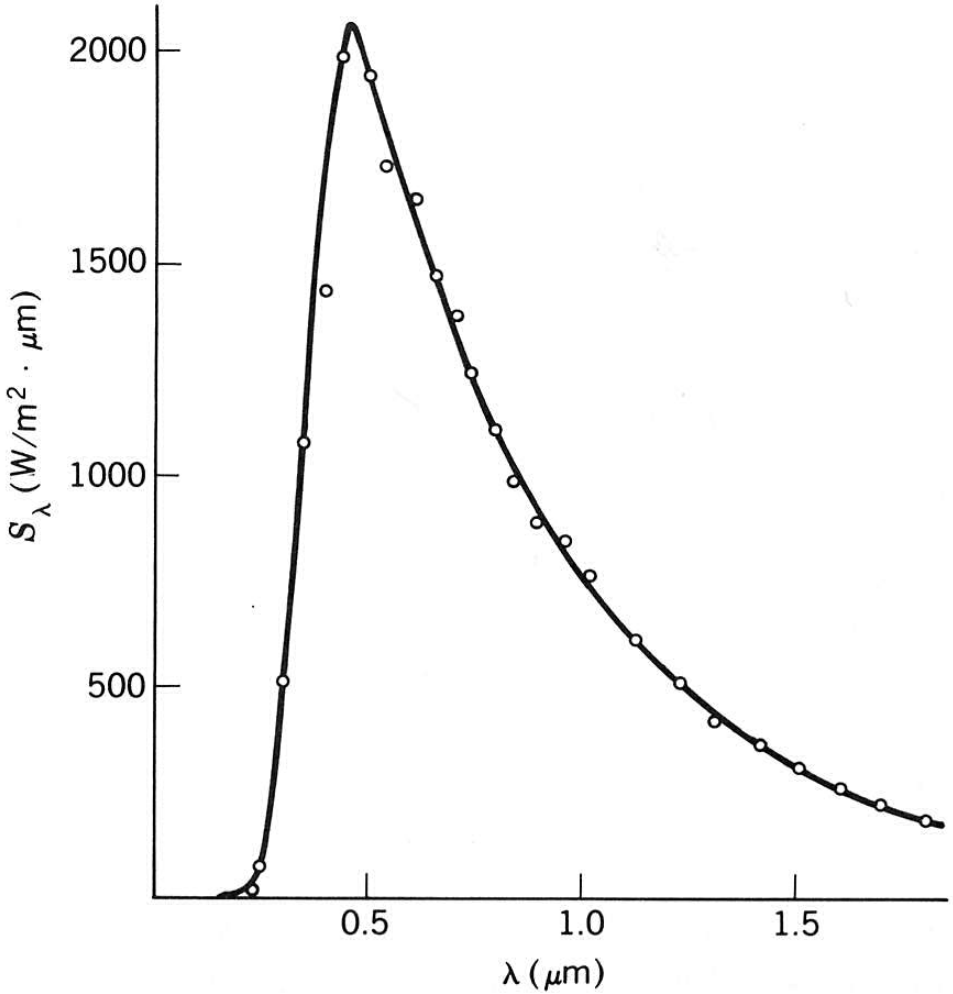
↑

Comparação entre as teorias de Planck e de Wien e as medidas de Coblentz (~1915)

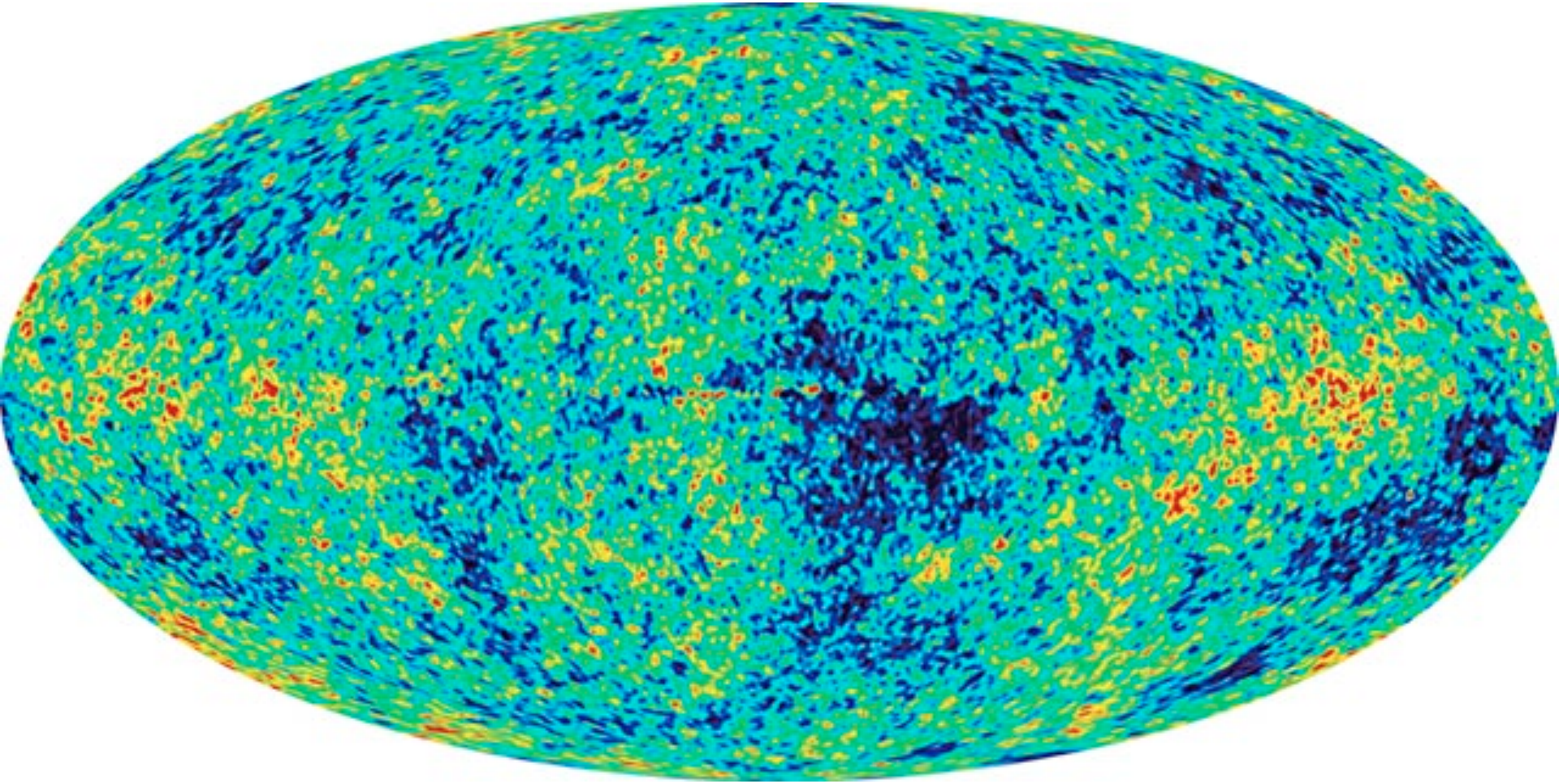
Radiância espectral do Sol

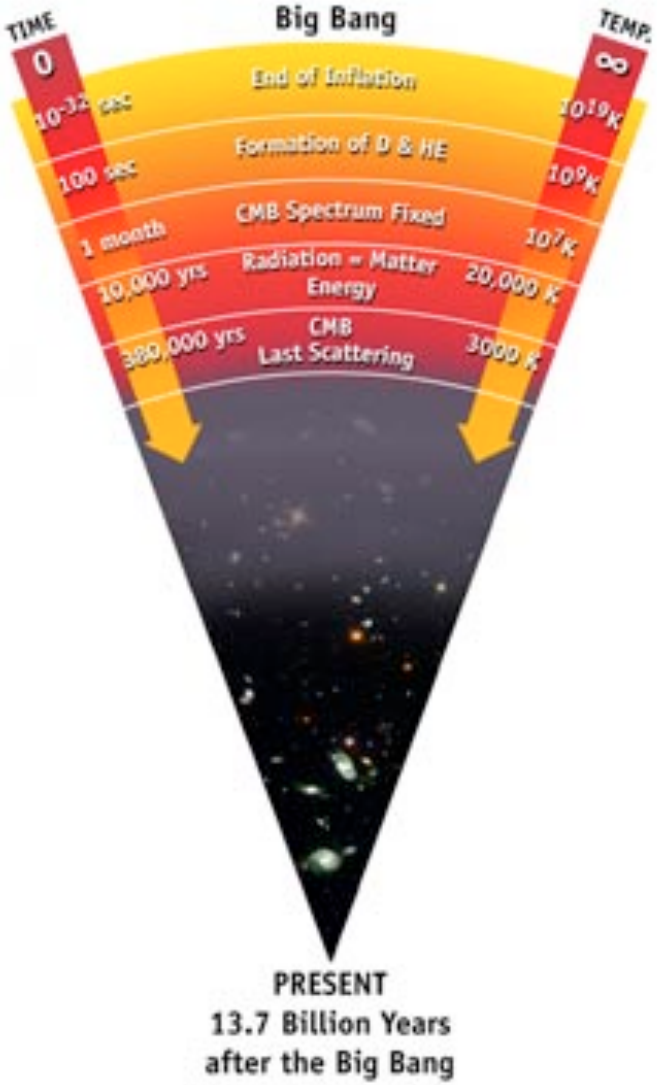
M.P. Thekaekara, *et al.*,

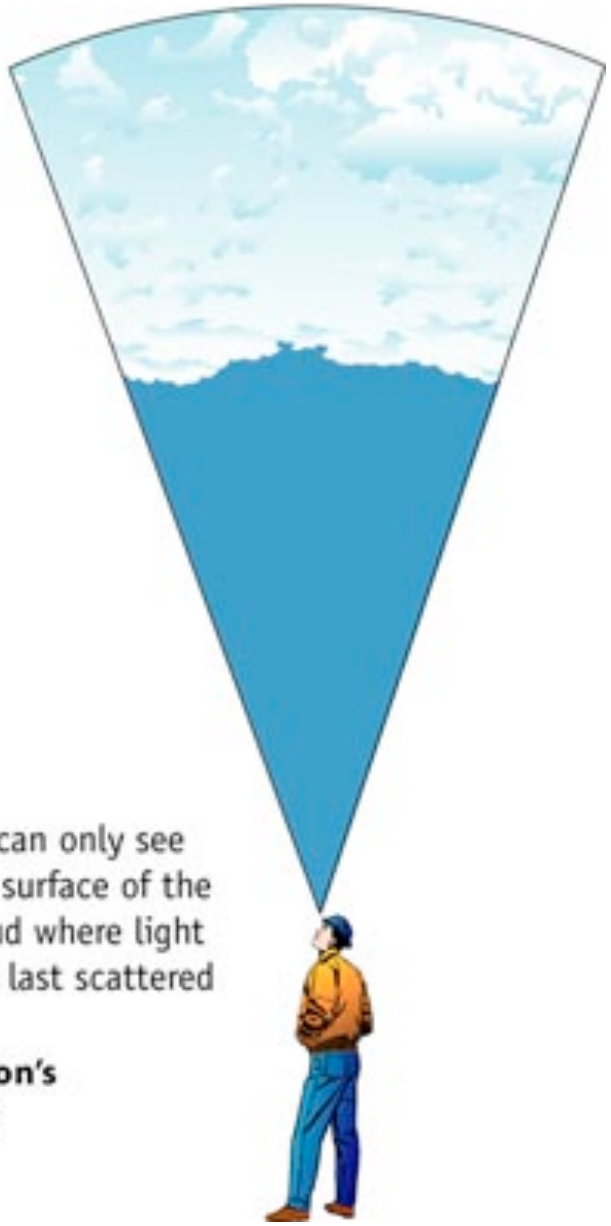
Appl. Opt. **8**(1969)1713 ↓



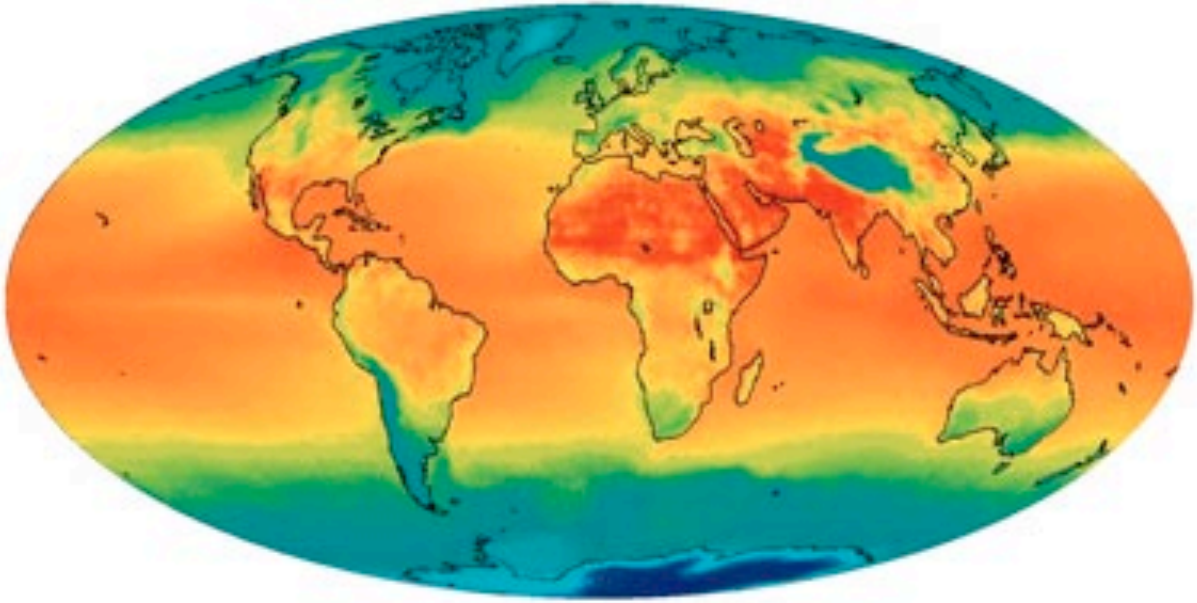
Medidas do espectro de microondas pelo WMAP



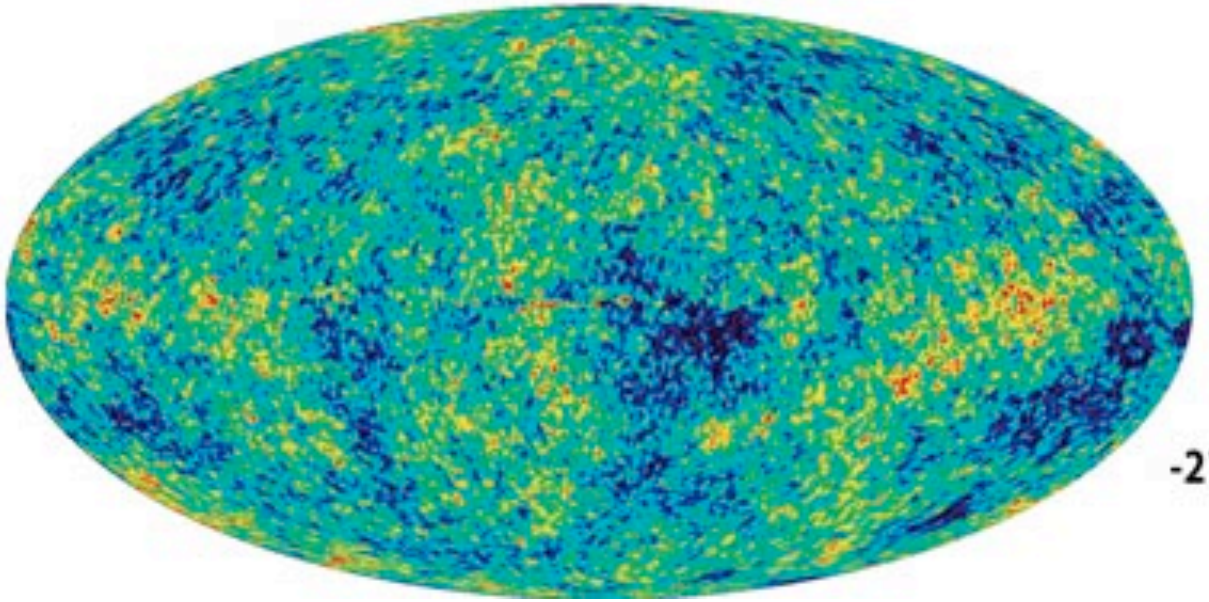




The cosmic microwave background Radiation's "surface of last scatter" is analogous to the light coming through the clouds to our eye on a cloudy day.



Earth
Temperatures



Microwave Sky
Temperatures

Wavelength [cm]

10 1 0.1

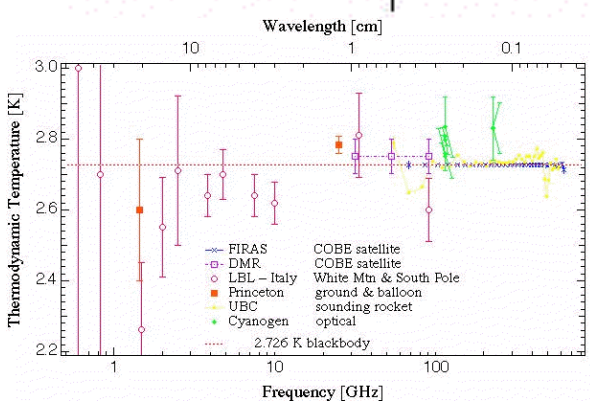
Brightness $\mathcal{L}_\nu$ [erg cm^{-2} sec^{-1} sr^{-1} Hz^{-1}]

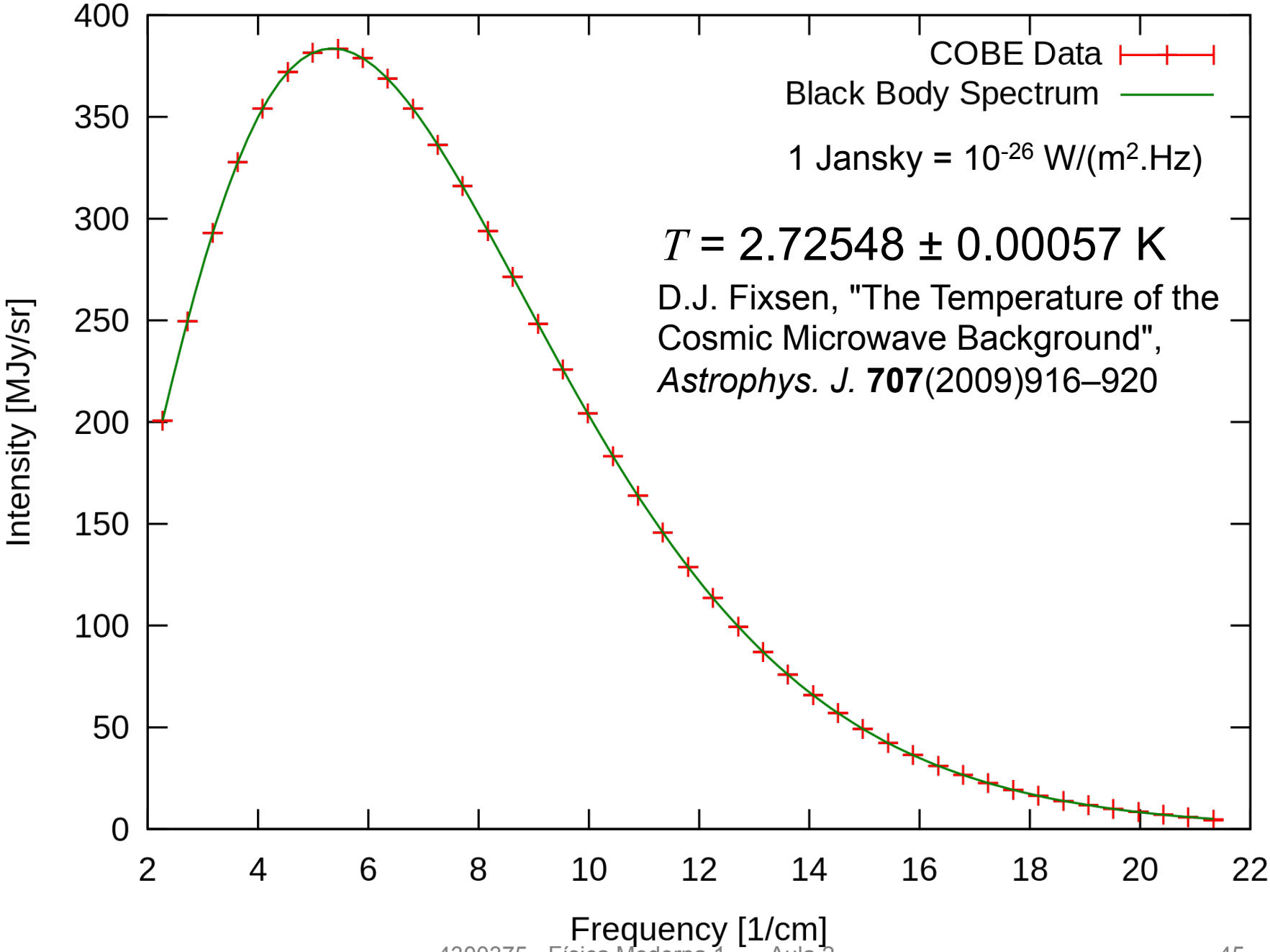
10^{-14} 10^{-15} 10^{-16} 10^{-17} 10^{-18} 10^{-19}

FIRAS COBE satellite
DMR COBE satellite
LBL – Italy White Mtn & South Pole
Princeton ground & balloon
UBC sounding rocket
Cyanogen optical
2.726 K blackbody

1 10 100

Frequency [GHz]




COBE Data
Black Body Spectrum
1 Jansky = 10-26 W/(m2.Hz)
T = 2.72548 ± 0.00057 K
D.J. Fixsen, "The Temperature of the Cosmic Microwave Background", Astrophys. J. 707(2009)916–920
Intensity [MJy/sr]
Frequency [1/cm]
400
350
300
250
200
150
100
50
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22