8a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Determine o conjunto dos pontos nos quais as funções abaixo são deriváveis (justificando).

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \text{ se } x \geq 0, \\ x^3 \text{ se } x < 0 \end{cases}$,

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \text{ se } x \geq 0, \\ 3 \text{ se } x < 0 \end{cases}$,

   (c) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

2. Mostre que a seguinte função f é de classe $\mathcal{C}^1$ (derivável, com derivada contínua): $f(x) = \begin{cases} |x|^3 \sin^2 \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:
   $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$, Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$,

   (a) Calcule $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$,

   (b) Calcule $f''(x), \forall x \in \mathbb{R}$,

   (c) Prove que $f^{(n)}(x) = p(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}}, \forall x \neq 0$, onde p é um polinômio.

   (d) Conclua que $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e que f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I e suponha que existam $\alpha > 1$ $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(x) - f(y) \leq c|x - y|^\alpha, \forall x, y \in I.$$

Prove que f é constante em I.

5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I e suponha que exista $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k, \forall x \in I$. Prove que f é Lipschitziana em I (i.e. existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall x, y \in I$).

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I e x_0 um ponto interior de I. Se f é derivável em I, prove que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$
Dê um exemplo mostrando que a recíproca é falsa ou seja,
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = L \not\Rightarrow f'(x_0) \text{ existe e } f'(x_0) = L.$$

7. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I e a um ponto interior de I. Suponha que f seja derivável em a. Então, para quaisquer sequências x_n, y_n de elementos de I, com $x_n < a < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$.

8. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências x_n, y_n, com $0 < x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, mas não existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.

9. Mostre que f é $f : A \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in A \cap A'$ se e somente se existe uma função $\eta : A \to \mathbb{R}$, contínua no ponto a tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x - a)$ para todo $x \in A$.

10. Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in A$. Se f e h são deriváveis no ponto a. com $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$, prove que g também é derivv́el neste ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

11. Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se de classe $\mathcal{C}^2$, quando é derivável e sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ (ou seja derivável com derivada contínua). Prove que se $f : I \to J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ são de classe $\mathcal{C}^2$, então a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^2$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Indique os intervalos de crscimento e decrescimento de f, seus pontos críticos e seus limites quando $x \to 0$ e quando $x \to +\infty$. Faça o mesmo para a função $g(x) = e^x$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivvel, tal que $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0) \cdot x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivvel no intervalo aberto I. Um ponto crítico $c \in I$ é denominado *não degenerado* se f'' é diferente de 0. Prove que todo ponto crítico não degenerado é um ponto de máximo local ou de mínimo local.

15. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivvel no intervalo aberto $]a, b[$, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é estritamente crescente.

16. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável no em $]a, c[\cup]c, b[$. Se existir $\lim_{x \to c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L.