Matemática III

1º Semestre de 2020

Sobre EDO′s

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares - A

Exercício 1 Seja $\frac{d}{dt}: \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Seja $\frac{d^0}{dt^0}: \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ a transformação identidade.

(a) Se $a \in \mathbf{R}$, qual a dimensão de $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$?

(b) Mostre que se $a, b \in \mathbf{R}$ e $a \neq b$ então $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \cap \ker(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0}) = \{O\}$.

(c) Mostre que $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ e $(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$ comutam.

(d) Calcule a composta $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \circ (\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$. Qual a dimensão de $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \circ (\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$?

(e) Mostre que se $a, b \in \mathbf{R}$ e $a \neq b$ então
$$\ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0}) \circ (\tfrac{d}{dt} - b\tfrac{d^0}{dt^0}) = \ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0}) \bigoplus \ker(\tfrac{d}{dt} - b\tfrac{d^0}{dt^0}).$$

Exercício 2 (Continuação) Seja $\frac{d}{dt}: \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Seja $\frac{d^0}{dt^0}: \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ a transformação identidade.

(f) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então g definida por $g(t) = tf(t)$ pertence a
$$\ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0})^2 := \ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0}) \circ (\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0}).$$

(g) Seja $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ e seja g_j definida por $g_j(t) = t^j f(t)$. Calcule $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})[g_j]$.

(h) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então g_j definida por $g_j(t) = t^j f(t)$ pertence a
$$\ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0})^{j+1}.$$

(i) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então $g_0, \ldots, g_{k-1}$ dadas por $g_j(t) = t^j f(t)$ pertencem a
$$\ker(\tfrac{d}{dt} - a\tfrac{d^0}{dt^0})^k.$$

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares - B

Dada uma equação diferencial ordinária linear de ordem n a coeficientes constantes, homogênea,
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$
ou equivalentemente
$$\left(\tfrac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\tfrac{d^2}{dt^2} + a_1\tfrac{d}{dt} + a_0\tfrac{d^0}{dt^0}\right)[y] = 0,$$
chama-se polinômio característico dessa equação ao polinômio
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Exercício 3 Mostre que se o polinômio característico de
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$
se fatora na forma na forma
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$
onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ são raízes reais com multiplicidades $k_1, \ldots, k_s$ respectivamente (portanto, $k_1 + \cdots + k_s = n$), então o operador
$$\left(\tfrac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\tfrac{d^2}{dt^2} + a_1\tfrac{d}{dt} + a_0\tfrac{d^0}{dt^0}\right)$$
se decompõe da seguinte forma:
$$\left(\tfrac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\tfrac{d^2}{dt^2} + a_1\tfrac{d}{dt} + a_0\tfrac{d^0}{dt^0}\right) = \left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1\tfrac{d^0}{dt^0}\right)^{k_1} \circ \left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_2\tfrac{d^0}{dt^0}\right)^{k_2} \circ \cdots \circ \left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_s\tfrac{d^0}{dt^0}\right)^{k_s}.$$
Essa decomposição, juntamente com os resultados da seção anterior de exercícios, será útil para obter a solução geral desse tipo de EDO.

Exercício 4 Use o item (e) do exercício 1 para resolver a equação

$$\Big(\frac{d}{dt} - 2\frac{d^0}{dt^0}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dt} - 3\frac{d^0}{dt^0}\Big)[f] = O$$

para $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Justifique seus argumentos.

Exercício 5 Ache a solução geral de $y'' - y' - 2y = 0$.

Exercício 6 Ache a solução geral real da seguinte EDO:

$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 29y = 0.$$

Exercício 7 Ache a solução geral real da seguinte EDO:

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

Exercício 8 Ache a solução geral *real* de

$$\Big(\frac{d}{dt} - 2\frac{d^0}{dt^0}\Big)^2 \circ \Big(\frac{d}{dt} - 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3 \circ \Big(\frac{d}{dt} + 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3[y] = 0,$$

isto é, da equação diferencial linear a coeficientes constantes cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3i)^3(\lambda + 3i)^3$.

Exercício 9 Ache a solução geral real da EDO

$$y^{(7)} + a_6 y^{(6)} + a_5 y^{(5)} + a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

sabendo que

$$s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s-3)^3(s^2 - 4s + 5)^2.$$