UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

14. Superfícies Quádricas

LOB 1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

1. Definição

- Uma quádrica, ou superfície quádrica, é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ que pode ser descrito, em relação a um ***sistema ortogonal de coordenadas***, por uma equação do 2º grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Mx + Ny + Pz + Q = 0 \qquad (1)$$

em que pelo menos um dos coeficientes quadráticos A, B, C, D, E ou F é diferente de zero.

- Através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), a eq. (1) pode ser reescrita em uma das formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + G = 0 \qquad (2)$$

ou

$$Ax^2 + By^2 + Rz = 0$$

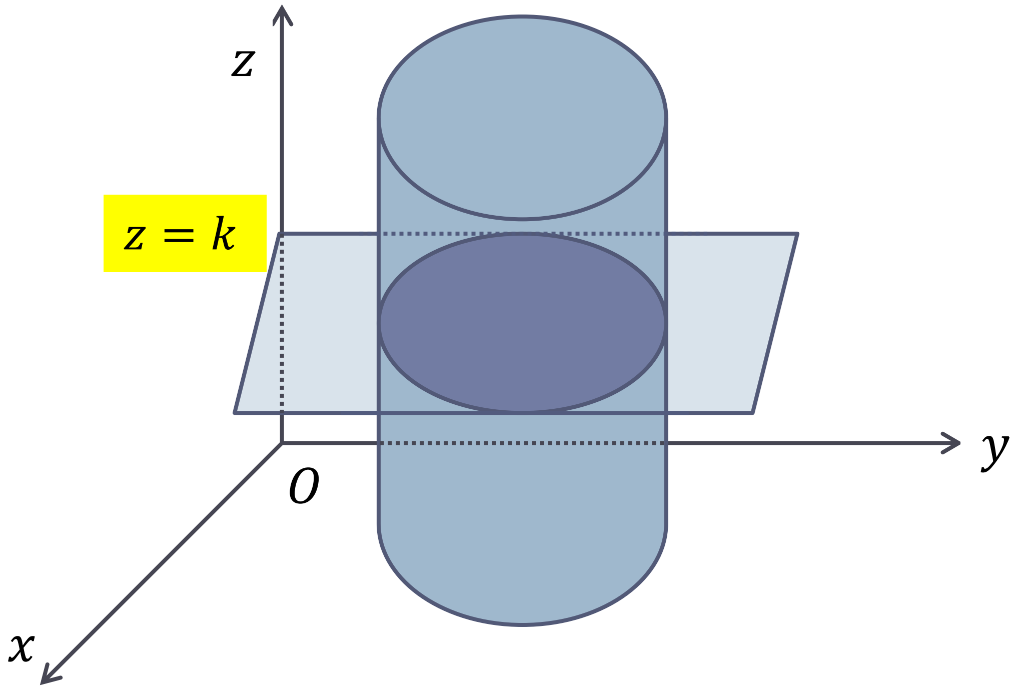
$$Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0 \qquad (3)$$

$$Rx + By^2 + Cz^2 = 0$$

- A eq. (2) representa quádricas centradas e as eqs. (3), quádricas não centradas.

2. Traços da Superfície

- Ao representar graficamente uma superfície, é importante conhecer as ***curvas de intersecção*** desta com os ***planos coordenados*** ou com ***planos paralelos a eles***. Tais curvas são chamados **traços** da superfície nos planos.
  - O traço de uma superfície quádrica é sempre uma seção cônica.



Procedimento para Identificação e Esboço das Quádricas

- O procedimento abaixo, ilustrado por meio de exemplos, será adotado para identificação e esboço dos gráficos de todas as quádricas. Esse procedimento consiste em analisar:

1. Traços com planos coordenados;
2. Traços com planos paralelos aos planos coordenados;
3. Condição de existência (domínio) das curvas resultantes dos traços.

3. Quádricas Centradas

- Se nenhum dos coeficientes da eq. (2) for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

denominada, qualquer delas, equação reduzida da quádrica centrada.

- ***Combinações possíveis*:** **1**, **2** ou **3** coeficientes positivos dos termos quadráticos na eq. (4) $\Rightarrow$ existem 3 tipos de superfícies quádricas centradas.

***Observação*:** Se os 3 coeficientes dos termos quadráticos na eq. (4) forem negativos, não existe lugar geométrico definido por esta equação.

3.1 *Elipsoide*

- O elipsoide é a superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Características:

1. Todos os coeficientes dos termos quadráticos são positivos.

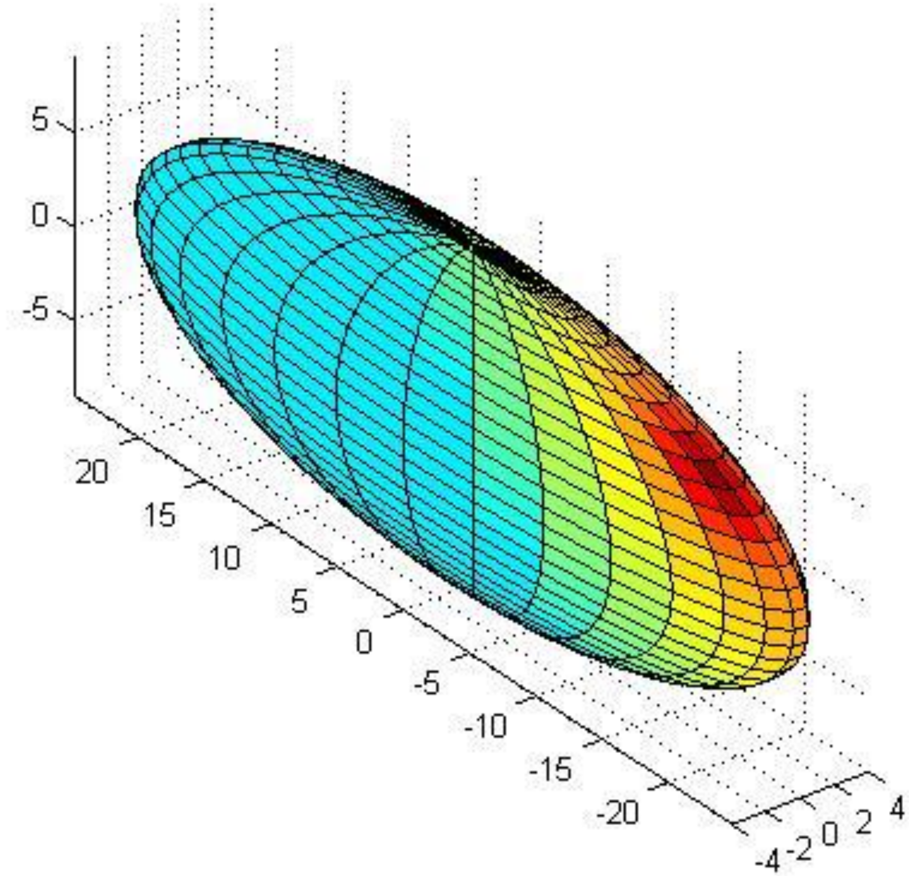
2. Existe simetria em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem do sistema cartesiano;

3. Traços com planos coordenados ou planos paralelos a eles: elipses, pontos ou vazio.

EXEMPLO

- Construa o gráfico do elipsoide representado pela equação abaixo. Utilize a abordagem por traços com os planos coordenados e os planos paralelos a eles:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

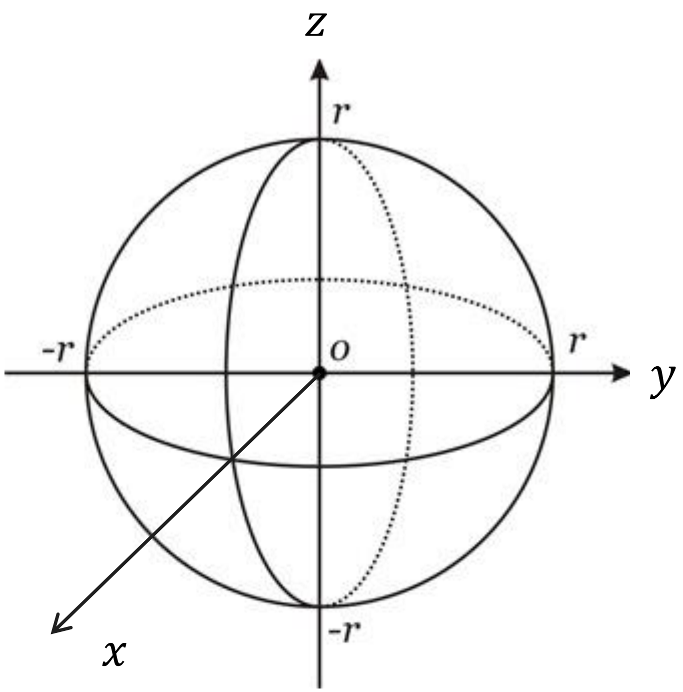

5
0
-5
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-4
-2
0
2
4

Caso Particular

- Assim como a circunferência é um caso particular da elipse em que $a = b = r$, a esfera é um caso particular do elipsoide em que $a = b = c = r$. Neste caso, a eq. do elipsoide pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

- Esta equação representa uma esfera de raio r, em que os traços com os planos coordenados são circunferências de raio r e os traços com planos paralelos a eles são circunferências ou pontos.



3.2 Hiperboloide de Uma Folha

- O hiperboloide de uma folha é a superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

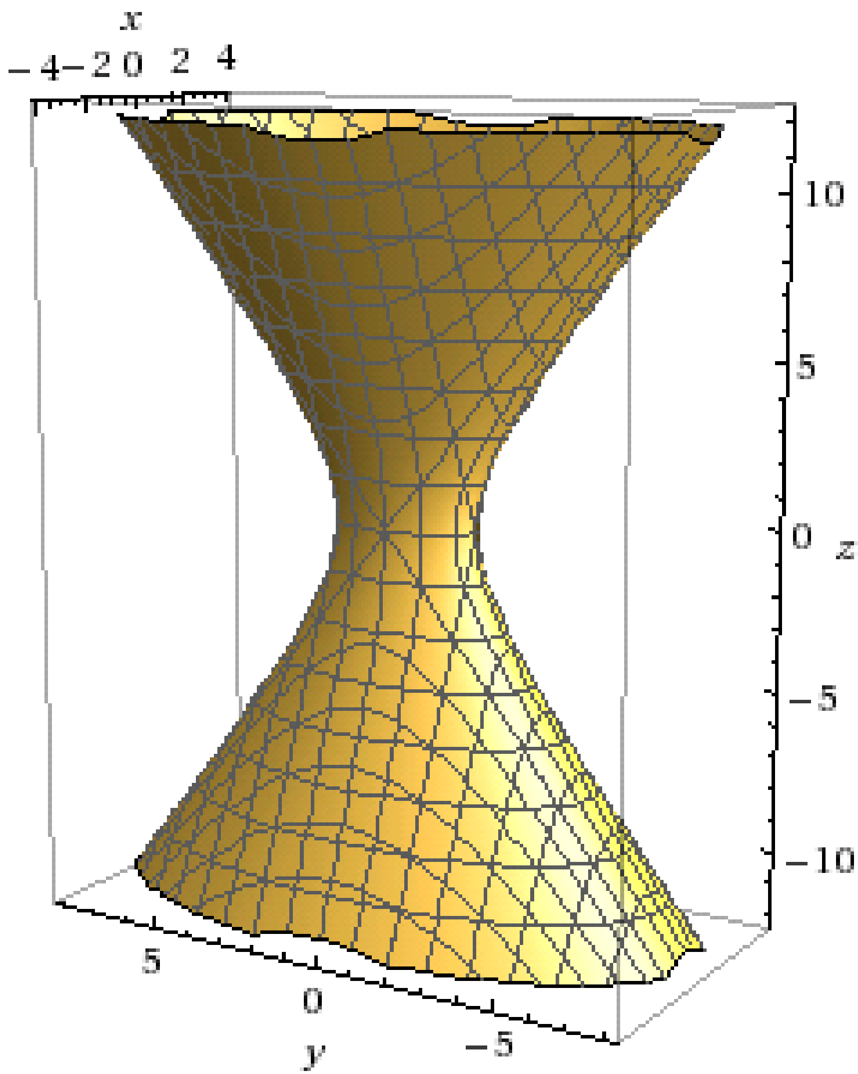
Características:

1. Dois dos coeficientes dos termos quadráticos são positivos e um deles é negativo.
   - Esta eq. representa um hiperboloide de uma folha ao longo de Oz (coeficiente de z^2 é negativo). Existem ainda duas outras possibilidades: coeficiente de x^2 ou de y^2 negativo. Nestes casos, o hiperboloide estará ao longo de Ox ou de Oy, respectivamente.
2. Existe simetria em relação aos planos e aos eixos coordenados e à origem;
3. Traços com planos coordenados ou planos paralelos a eles: elipses, hipérboles ou retas concorrentes.

EXEMPLO

- Construa o gráfico do hiperboloide de uma folha representado pela equação abaixo. Utilize a abordagem por traços com os planos coordenados e os planos paralelos a eles:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$


x
−4 −2 0 2 4
10
5
0
z
−5
−10
5
0
y
−5

3.3 *Hiperboloide de Duas Folhas*

- O hiperboloide de duas folhas é a superfície representada pela equação:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

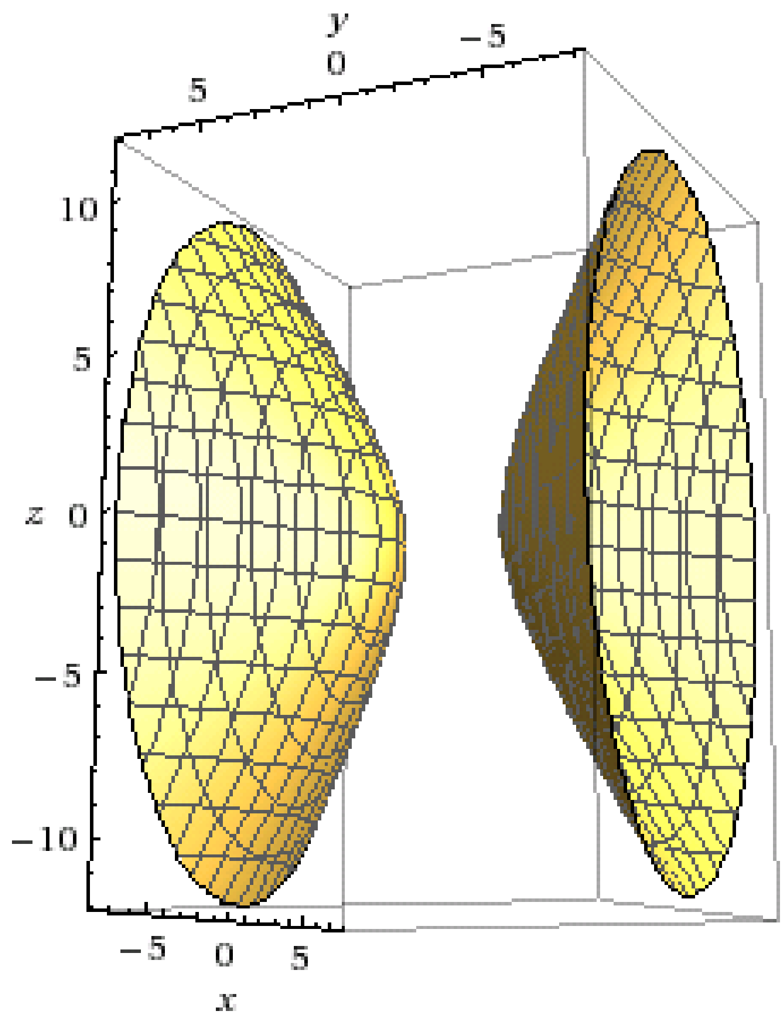
Características:

1. Dois dos coeficientes dos termos quadráticos são negativos e um deles é positivo.
   - Esta eq. representa um hiperboloide de duas folhas ao longo de Oy (coeficiente de y^2 é positivo). Existem ainda duas outras possibilidades: coeficiente de x^2 ou de z^2 positivo. Nestes casos, o hiperboloide estará ao longo de Ox ou de Oz, respectivamente.
2. Existe simetria em relação aos planos e aos eixos coordenados e à origem;
3. Traços com planos coordenados ou planos paralelos a eles: elipses, pontos, vazio ou hipérboles.

EXEMPLO

- Construa o gráfico do hiperboloide de duas folhas representado pela equação abaixo. Utilize a abordagem por traços com os planos coordenados e os planos paralelos a eles:

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$


y
−5
0
5
10
5
z 0
−5
−10
−5
0
5
x

4. Quádricas Não Centradas

- Se todos os coeficientes das eqs. (3) forem não nulos ($A, B, C, R \neq 0$), elas podem ser escritas sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by \qquad (5)$$

$$\pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

denominada, qualquer delas, **equação reduzida da quádrica não centrada**.

- ***Combinações possíveis*:** coeficientes dos termos quadráticos das eqs. (5) com mesmo sinal ou com sinais contrários → existem 2 tipos de superfícies quádricas não centradas.

4.1 *Paraboloide Elíptico*

- O paraboloide elíptico é a superfície representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

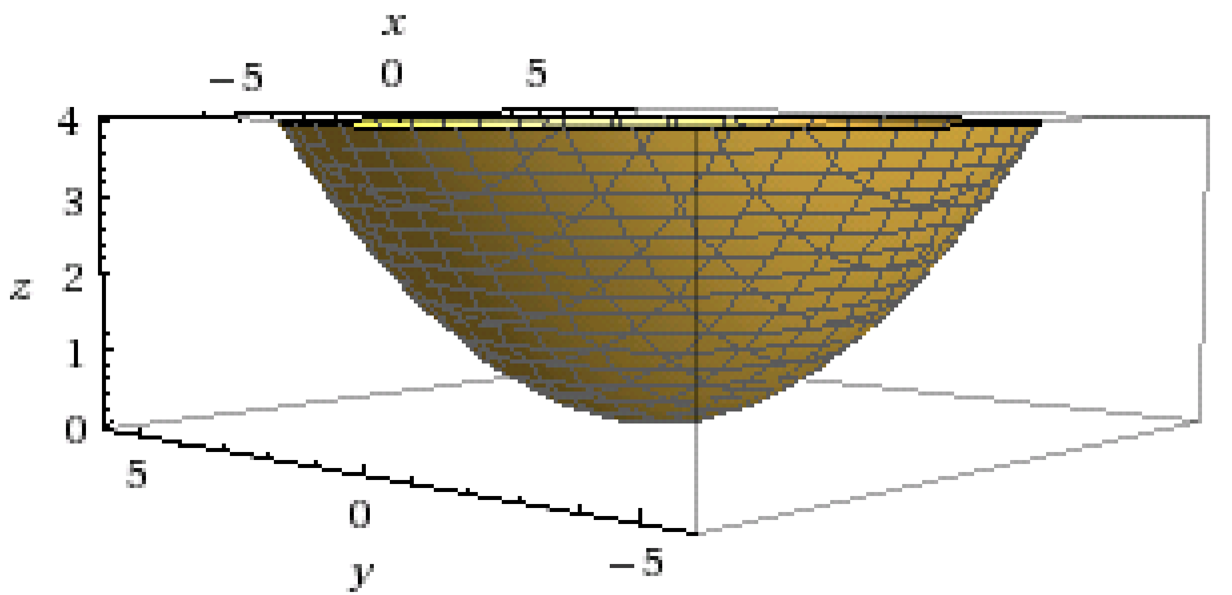
Características:

1. Os coeficientes dos termos quadráticos têm mesmo sinal.
   - Esta eq. representa um paraboloide elíptico com eixo ao longo de Oz (termo linear em z). Existem ainda duas outras possibilidades: termo linear em x ou y. Nestes casos, o paraboloide terá eixo ao longo de Ox ou de Oy, respectivamente.
   - Sinais dos termos quadráticos (+), então a concavidade do paraboloide será positiva em seu eixo; e sinais (–), concavidade também negativa.
2. Existe simetria em relação ao eixo do paraboloide e aos planos coordenados que contém o eixo;
3. Traços com planos coordenados ou planos paralelos a eles: parábolas, elipses, ponto ou vazio.

EXEMPLO

- Construa o gráfico do paraboloide elíptico representado pela equação abaixo. Utilize a abordagem por traços com os planos coordenados e os planos paralelos a eles:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$$


x
−5
0
5
4
3
2
1
0
z
5
0
y
−5

4.1 *Paraboloide Hiperbólico*

- O paraboloide hiperbólico é a superfície representada pela equação:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

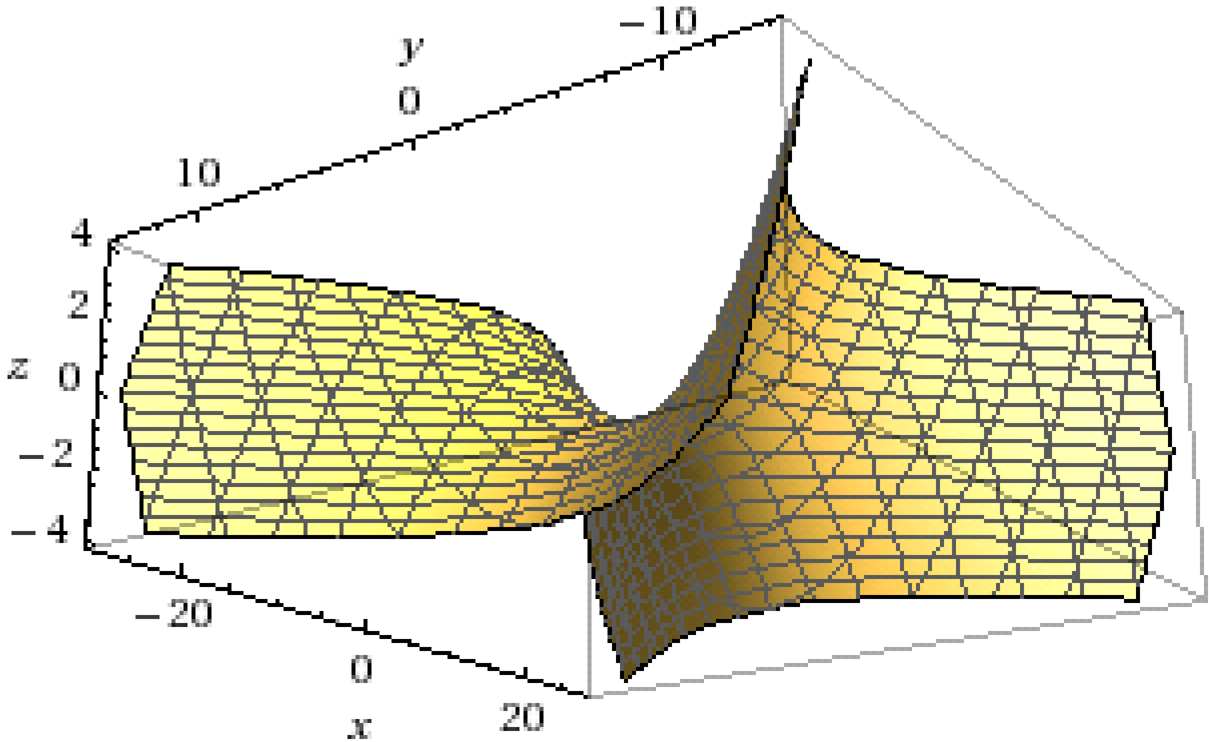
Características:

1. Os coeficientes dos termos quadráticos têm sinais contrários.
   - Esta eq. representa um paraboloide hiperbólico ao longo de Oz (termo linear em z). Existem ainda duas outras possibilidades: termo linear em x ou y. Nestes casos, o paraboloide terá eixo ao longo de Ox ou de Oy, respectivamente.
2. Existe simetria em relação ao eixo coordenado ao longo do qual o paraboloide cresce;
3. Traços com planos coordenados ou planos paralelos a eles: parábolas, hipérboles ou retas concorrentes.

EXEMPLO

- Construa o gráfico do paraboloide hiperbólico representado pela equação abaixo. Utilize a abordagem por traços com os planos coordenados e os planos paralelos a eles:

$$-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=3z$$



y
−10
0
10
4
2
z
0
−2
−4
−20
0
x
20