

Observações da Fórmula de Taylor

Considere como exemplo a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ e $x_0 = 4$

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ como } y = f(x)$$

$$y = \frac{1}{4} (x - 4) + 2$$

$$\boxed{y = \frac{x - 4}{4} + 2}$$

Então $y = \frac{x-4}{4} + 2$ é uma aproximação de grau 1 de $f(x) = \sqrt{x}$, numa vizinhança de $x_0 = 4$. Observa-se que em $x = 4$ é permitido fazer o cálculo da função usando a reta tangente para a aproximação.

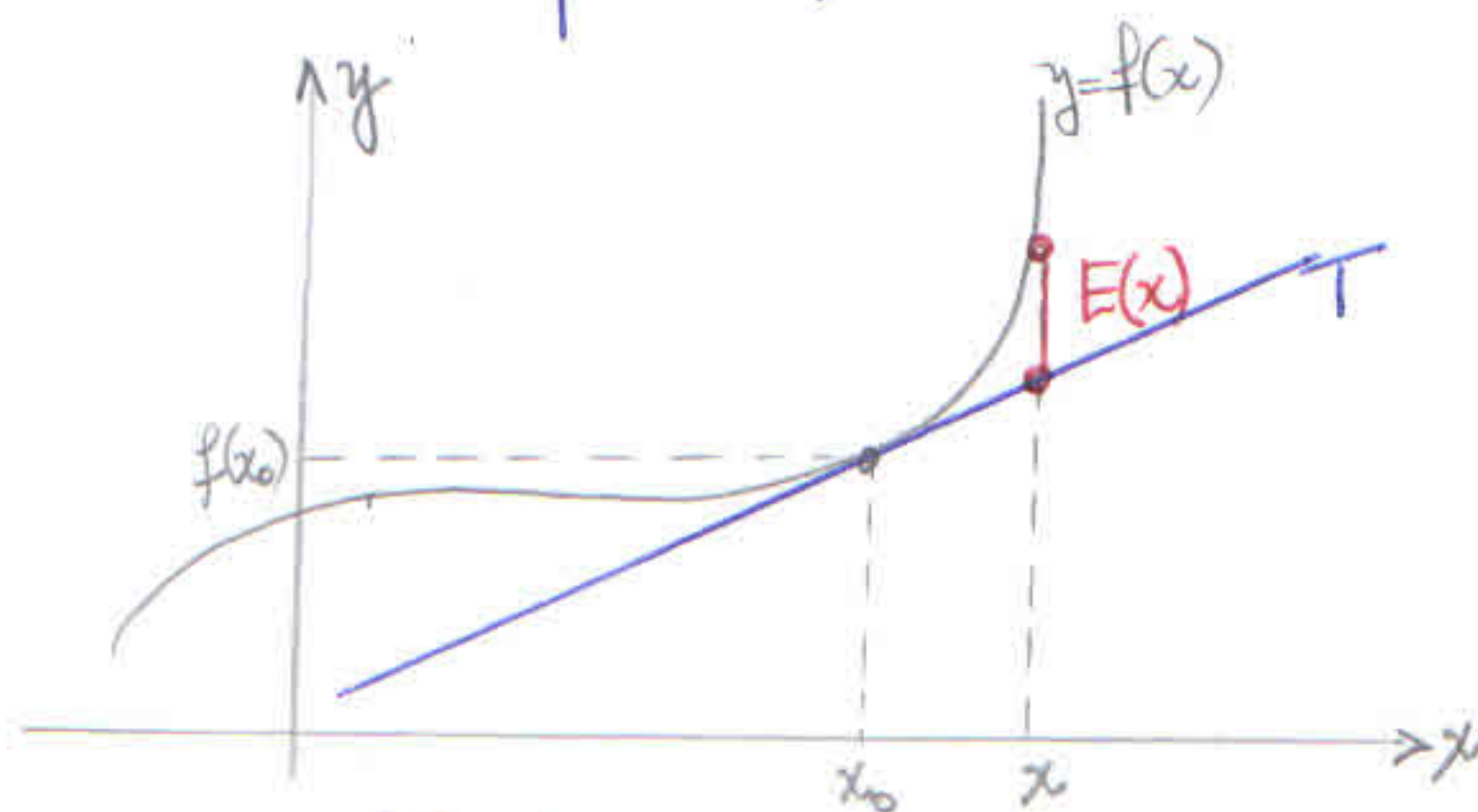
$y = \frac{x-4}{4} + 2$ é a aproximação de grau 1 de $f(x) = \sqrt{x}$, numa vizinhança de $x_0 = 4$. Assim $\sqrt{4,3} \approx 2,073644...$

e a reta tangente fornece $2 + \frac{0,3}{4} = 2,075$

correspondente a uma aproximação satisfatória

Parte complementar do Polinômio de Taylor

Seja f derivável no ponto x_0



Então a eq. da reta tg,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ onde}$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0}$$

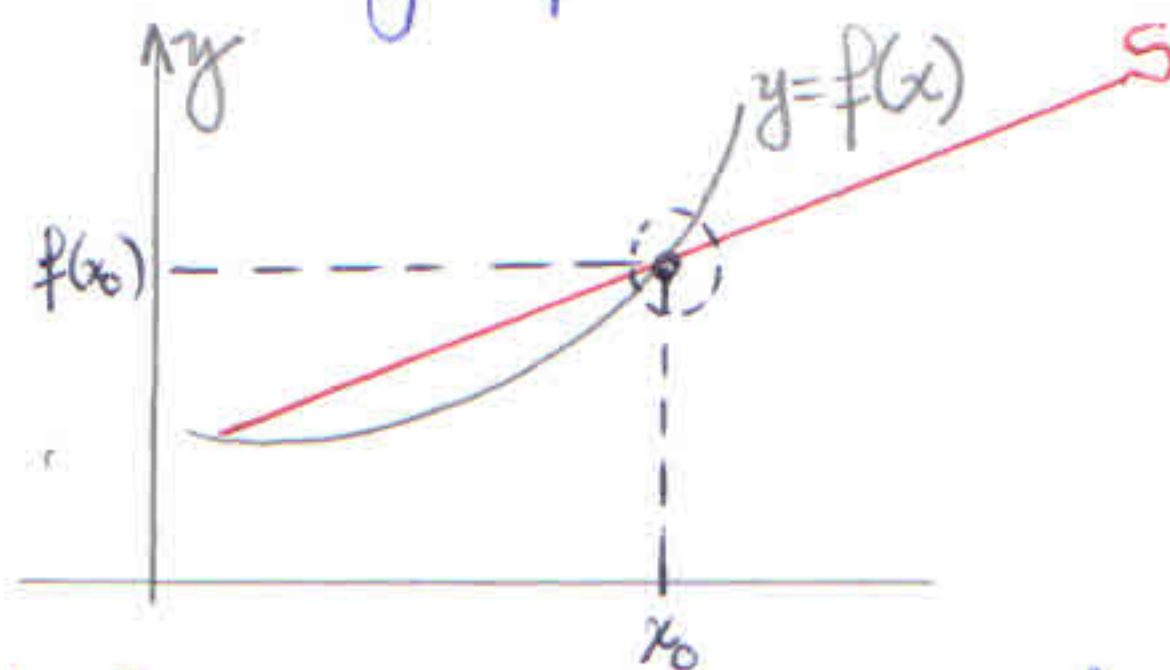
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{definição } f'(x_0)} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0}$$

Parte complementar do Polinômio de Taylor

Considere o seguinte gráfico:



Seja $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ e calculemos o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - S(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0}$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right] = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = f'(x)}$$

Ou seja, nenhuma outra reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ tem essa propriedade, é somente a reta tangente no contexto apresentado.

Exercício

1) Calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{-4}$$

$$f'''(x) = -6 x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$f'''(2) = \frac{-6}{(2)^4} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{48}(x-2)^3$$

2) Calcular um valor aproximado para $\sqrt{9,03}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 9$$

$$f(x_0) = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \quad ; \quad f'(9) = \frac{1}{2 \sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$P(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9)$$

$$P(x) = 3 + \frac{x-9}{6}$$

Como $f(x) \approx T(x)$ para $x = 9,03$

$$\sqrt{9,03} \approx 3 + \frac{1}{6} (9,03 - 9) = 3 + \frac{1}{6} (0,03) = 3,005$$