FÓRMULA DE TAYLOR

DISCIPLINA DE CÁLCULO I

OBJETIVO DA ABORDAGEM DA AULA

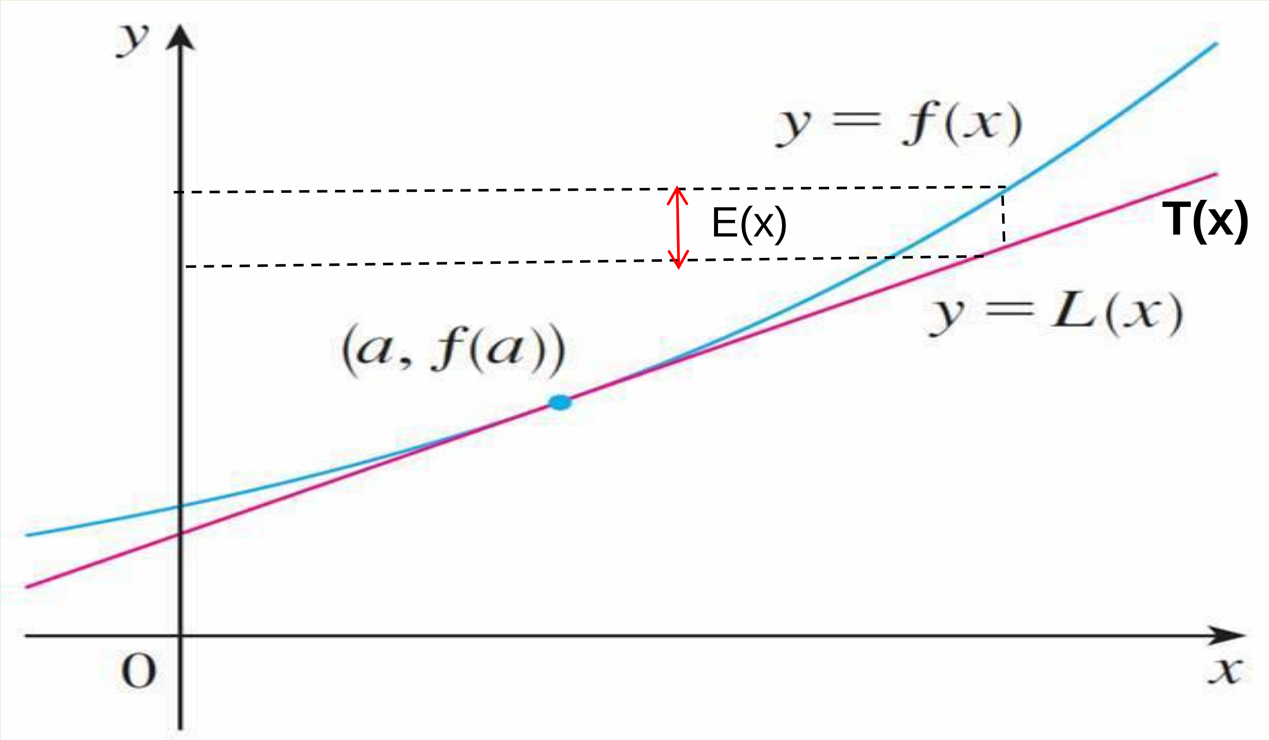
✓**Expandir funções em série de Taylor com aproximação até *n* ordem;**

✓**Aplicar conhecimentos adquiridos sobre derivadas;**

✓**Expandir funções trigonométricas e exponenciais em série de Taylor com aproximação até *n* ordem;**

Usaremos a reta tangente em (x_0, *f* (x_0)) como uma aproximação para a curva *y* = *f* (*x*) quando *x* estiver próximo de x_0. A equação para a reta tangente é :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Para cada x $\in D$, seja E(x) o erro que se comete na aproximação de f(x) por T(x):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + E(x), x \in D_f$$

Então o $\lim_{x \to x_0} E(x) = 0$

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), x \neq x_0$$

$$T(x_0) = f(x_0)$$

Neste estudo torna-se importante analisar a seguinte condição:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$$

Segue que, se *f* for derivável em $x_{0,}$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é a função afim que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0

O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

denomina-se *polinômio de Taylor* de **ordem 1** de f em volta de x_0

Dentro deste contexto a ideia se expande para o polinômio de Taylor de **ordem 2,** através do teorema 1:

Teorema 1: Seja f derivável até a **2ª ordem** no intervalo *I* e sejam x, $x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x, x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

E(x)

Teorema 2: Seja f derivável até a **3ª ordem** no intervalo *I* e sejam x, $x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x, x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3$$

E(x)

Polinômio de Taylor de Ordem *n*

Se *f* for derivável até a ordem *n* no intervalo I e $x_0 \in I$. O seguinte polinômio,

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 + \ldots.. + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta x_0.*

Os.: O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de $x_0 = 0$ denomina-se polinômio de Mac-Laurin, de ordem n, de *f*.