Geometria Analítica

Superfícies Quádricas

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Superfícies Quádricas

Chama-se quádrica qualquer subconjunto Ω de E^3 que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coodernadas, por uma equação de segundo grau, nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

Sendo a, b, c, d, e ou f diferentes de zero.

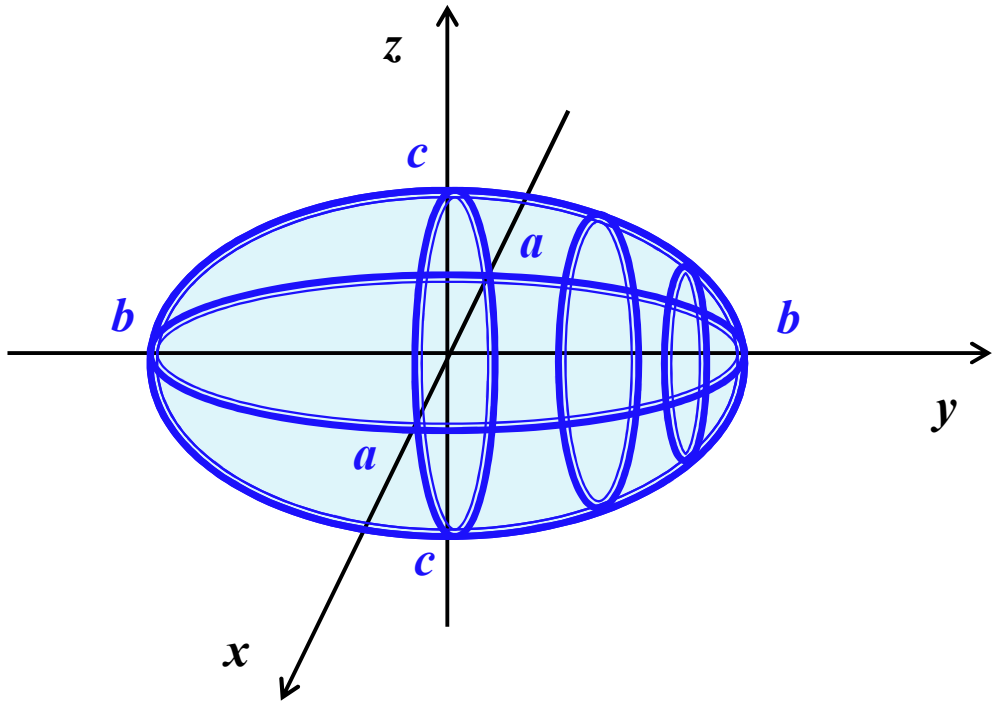
Superfícies Quádricas Centradas

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica centrada:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Elipsoide
- Hiperboloide de uma folha
- Hiperboloide de duas folhas

Elipsoide



Equação do elipsoide:

$$+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a, b e $c > 0$

As medidas dos semieixos do elipsoide.

Elipsoide com centro fora da origem do sistema de coordenadas:

Se o centro do elipsoide é o ponto (h, k , l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Superfície esférica de raio a:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad \text{onde } a=b=c$$

Superfície esférica de centro (h, k, l) e raio a:

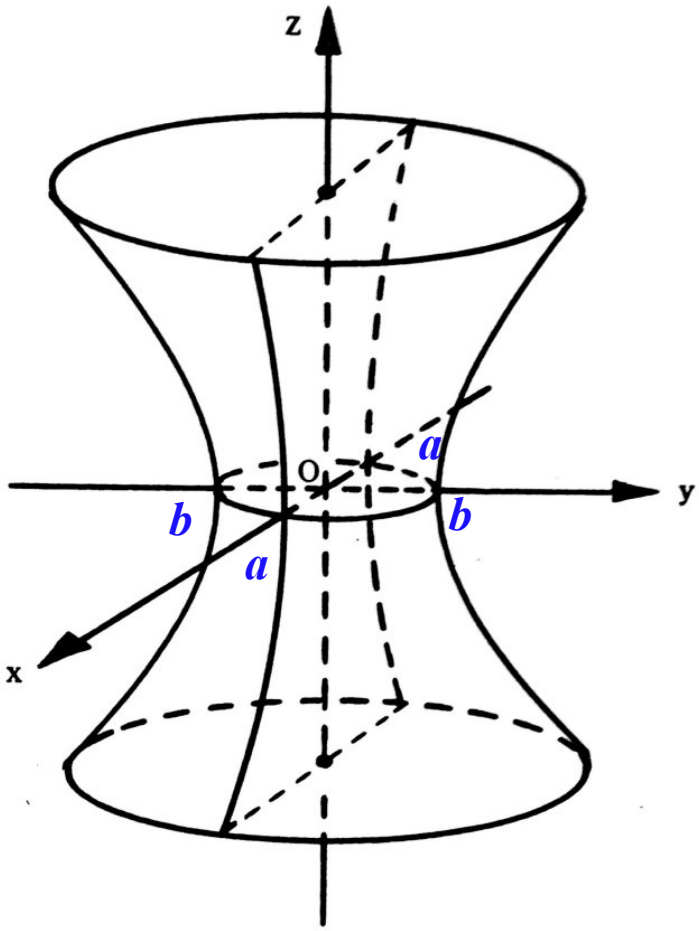
$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=a^2$$

Hiperboloide de uma folha

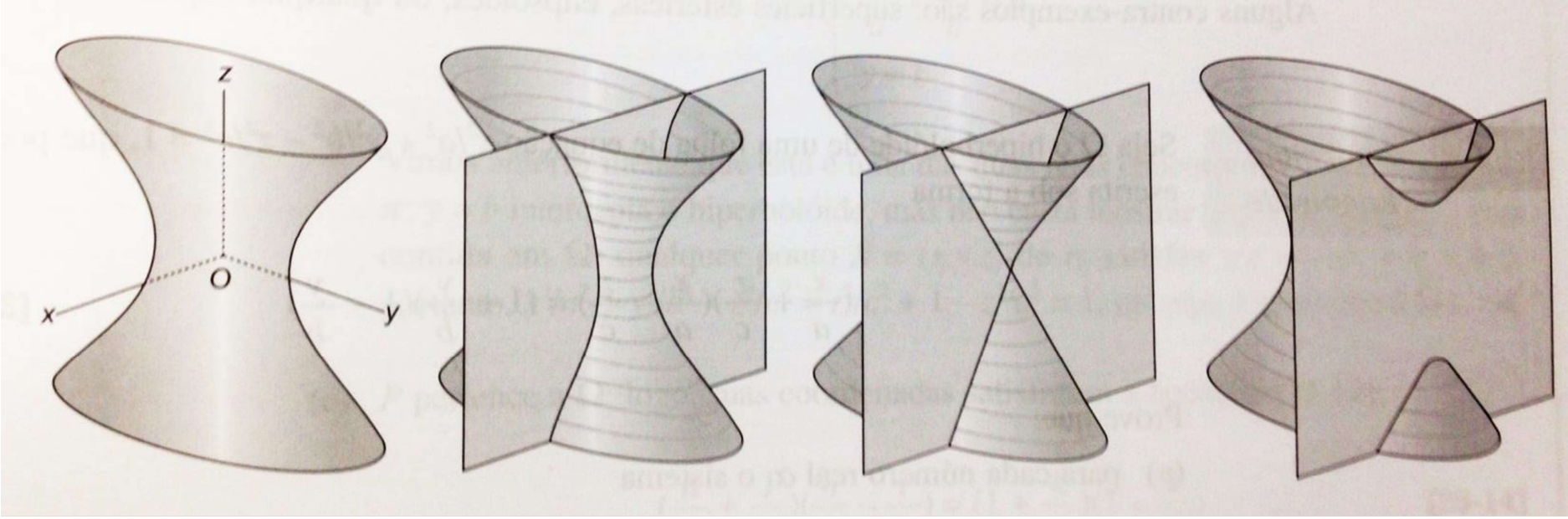
A equação que representa um hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *z*.



Hiperboloide de uma folha



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *y*.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

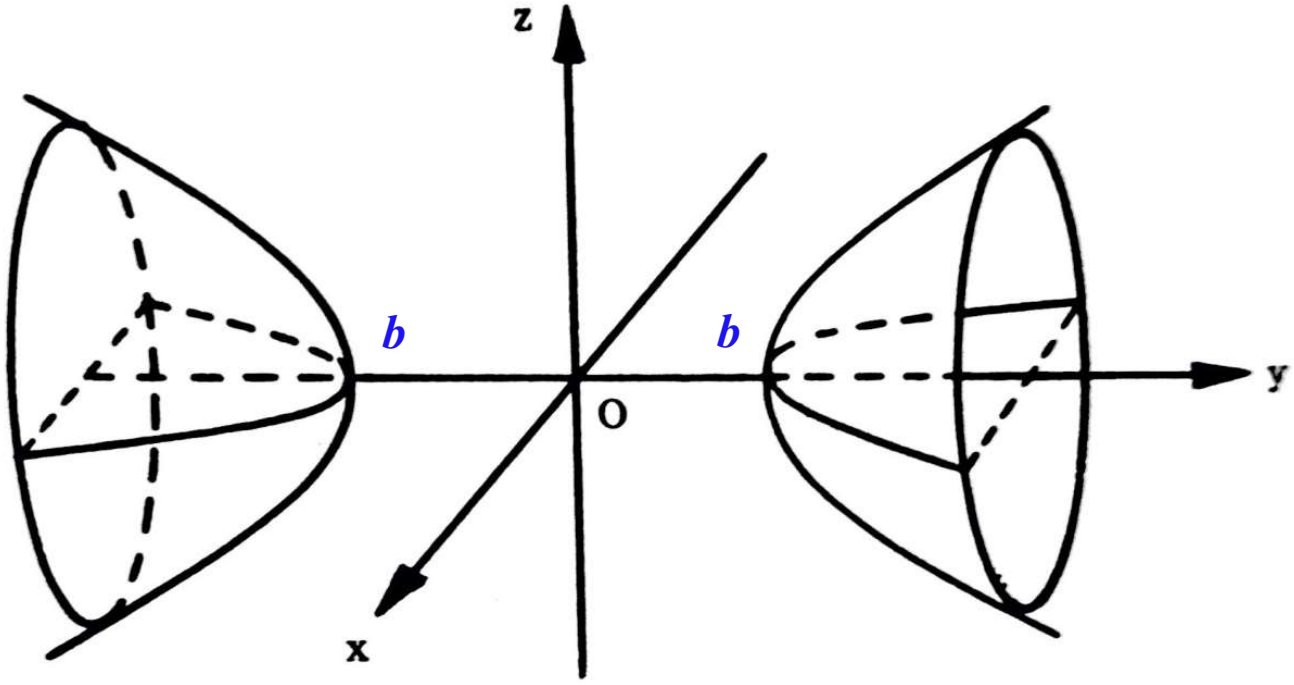
Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo *x*.

Hiperboloide de duas folhas

A equação que representa um hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo *y*.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo x.

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo z.

Superfícies quádricas não centradas

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by$$

$$\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax$$

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada.

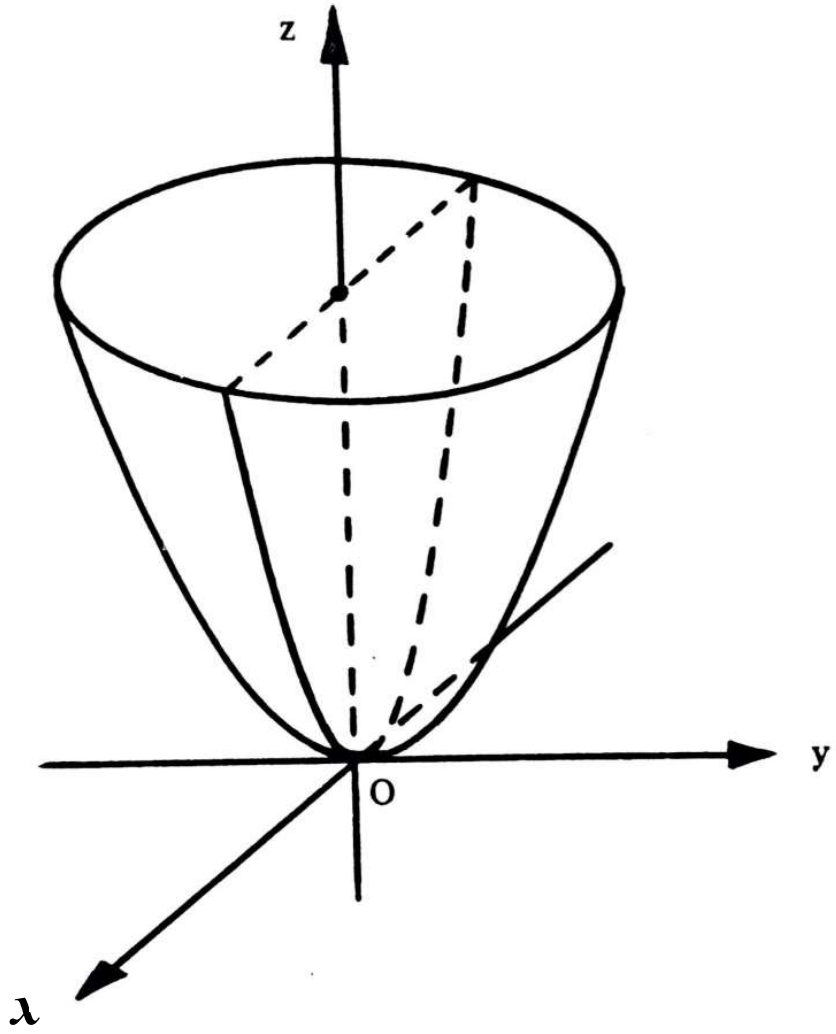
- *Paraboloide elíptico*
- *Paraboloide hiperbólico*

Paraboloide elíptico

Sinais iguais:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Forma canônica da equação do paraboloide elíptico ao longo do eixo do *z*.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$$

Forma canônica da equação do paraboloide elíptico ao longo do eixo do y.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$$

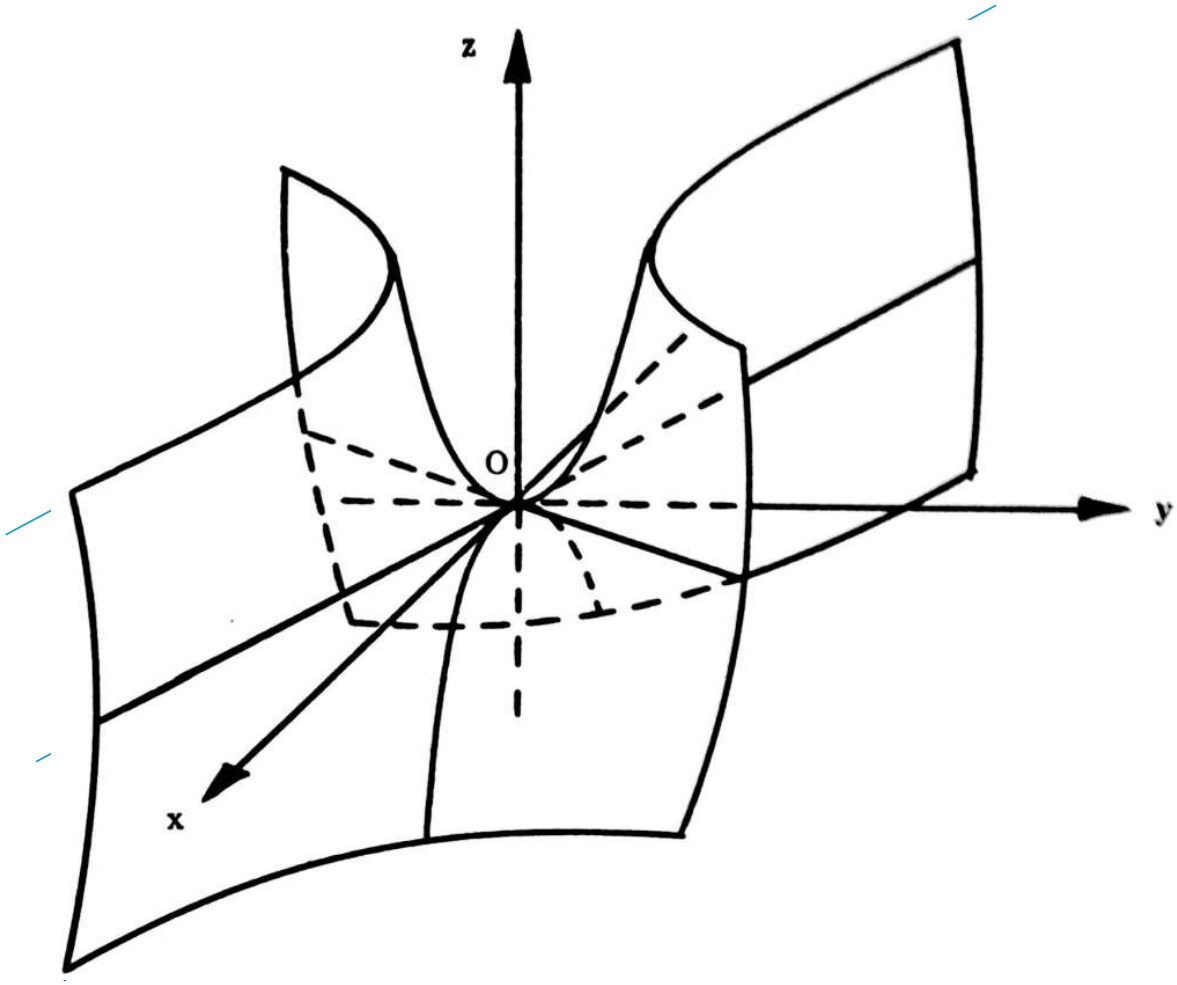
Forma canônica da equação do paraboloide elíptico ao longo do eixo do x.

Paraboloide hiperbólico

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Forma canônica da equação do paraboloide hiperbólico ao longo do eixo dos *z*.



$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$$

Forma canônica da equação do paraboloide hiperbólico ao longo do eixo dos y.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

Forma canônica da equação do paraboloide hiperbólico ao longo do eixo dos x.

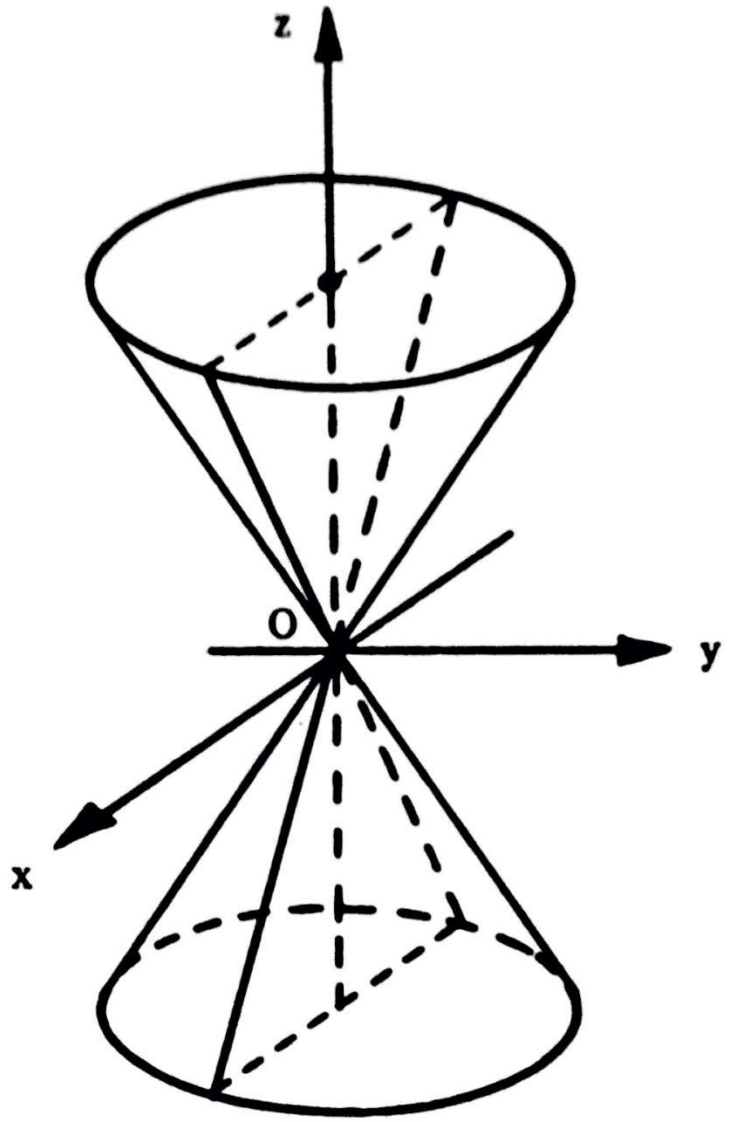
Superfície Cônica

Superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.

A reta é denominada geratriz, a curva plana é a diretriz e o ponto fixo dado é o vértice da superfície cônica.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos *z*.

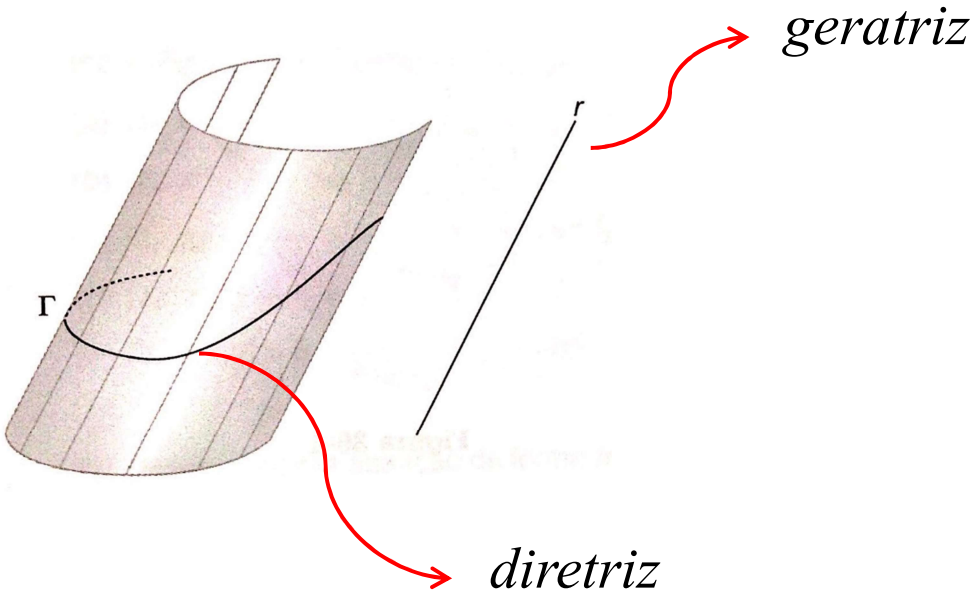


$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$ Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos x.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$ Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos y.

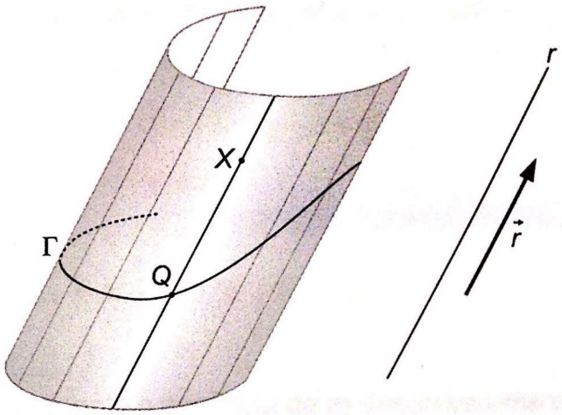
Superfície cilíndrica

Um subconjunto Ω de E^3 é uma **superfície cilíndrica** se existem uma curva Γ e uma reta r tais que Ω seja a reunião das retas paralelas a r que contêm algum ponto de Γ. Cada uma dessas retas é chamada **geratriz** de Ω, e Γ é chamada de **diretriz** de Ω.



Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, sejam $\vec{r} = (m, n, p)$ um vetor diretor de *r* e

$$\Gamma \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



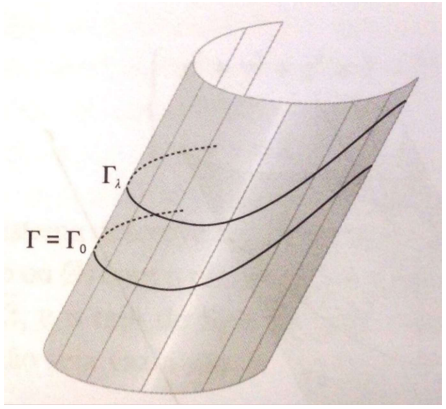
De acordo com a definição, um ponto $X(x, y, z)$ pertence a Ω se, e somente se, existem um ponto $Q(u, v, w)$ de Γ e um número real λ tais que $\overrightarrow{XQ} = \lambda\vec{r}$, ou seja:

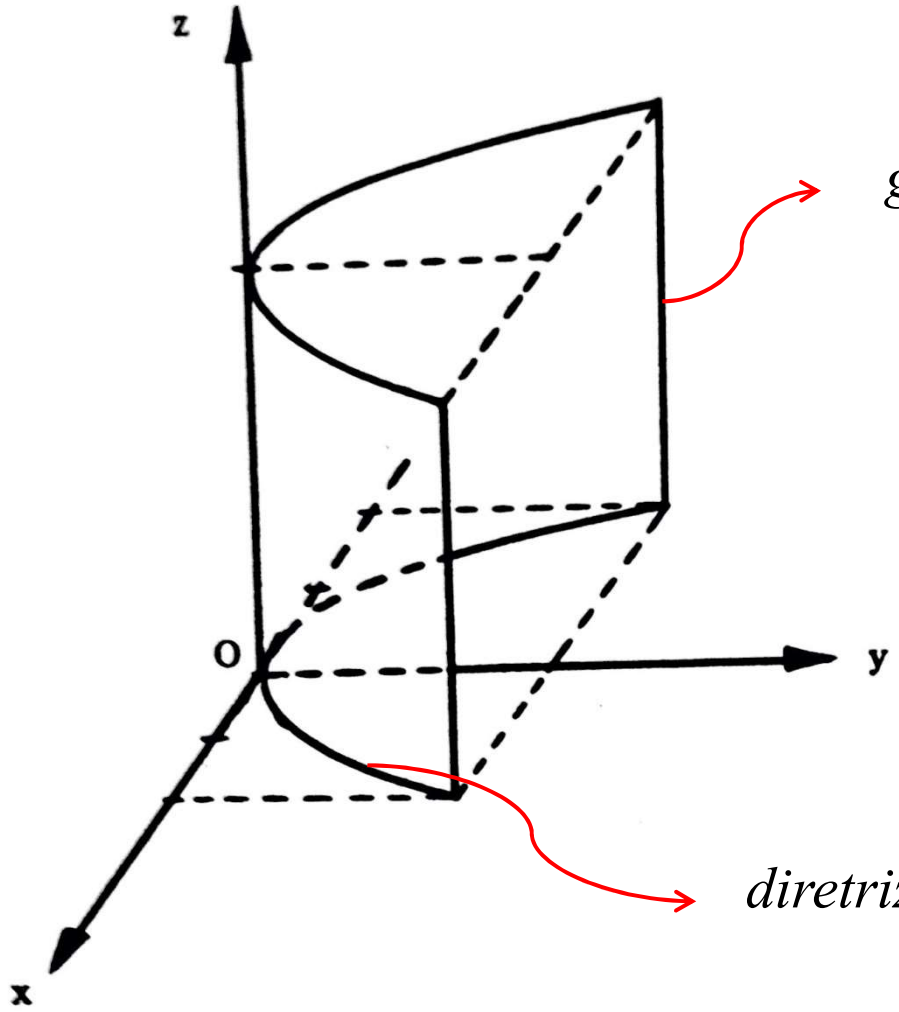
$$\begin{cases} u = x + \lambda m \\ v = y + \lambda n \\ w = z + \lambda p \end{cases}$$

Logo, X pertence a Ω se, e somente se, existe um número real λ tal que:

$$\Gamma \begin{cases} f(x+\lambda m, y+\lambda n, z+\lambda p) = 0 \\ g(x+\lambda m, y+\lambda n, z+\lambda p) = 0 \end{cases}$$

Desse modo, um sistema de duas equações dependendo do parâmetro λ, caracteriza os pontos de Ω.





geratriz

diretriz

$$\begin{cases} x^2 = 2y \end{cases}$$

Exercício

Obtenha equações da superfície cilíndrica Ω cujas geratrizes são paralelas à reta $r: X = (0,1,0) + \lambda(1,1,2)$, que tem por diretriz Γ a interseção das superfícies $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $\Omega_2: z = 0$.