

5^a lista de exercícios

1) a) Uma solução de $X'X\beta = X'Y$ e $\beta^0 = GX'Y$,

G inversa generalizada de $X'X$.

Como $L'\beta$ é estimável, então $L' = Z'X$.

$$\text{Logo, } L'\beta = L'\beta^0 = Z'X\beta^0 = Z'XGX'Y$$

XGX' é invariante em G , portanto $L'\beta$ é invariante com a solução β^0 de $X'X\beta = X'Y$.

$$b) \text{Cov}(L'\beta^0, M'\beta^0) = L' \text{Var}(\beta^0) M$$

$$L'\beta \text{ e } M'\beta \text{ estimáveis} \Rightarrow \begin{cases} L' = Z_1'X & e \\ M = X'Z_2 \end{cases}$$

$$\text{Var}(\beta^0) = \text{Var}(GX'Y) = GX' \text{Var}(Y) XG'$$

$$\therefore \text{Cov}(L'\beta^0, M'\beta^0) = L'GX' \text{Var}(Y) XG'M$$

$$= Z_1'XGX' \sigma^2 I XG'X'Z_2 = Z_1' \underbrace{XGX'X}_{X} G'X'Z_2 \sigma^2$$

$$= Z_1'XG'X'Z_2 \sigma^2 = Z_1'XGX'Z_2 \sigma^2$$

$$= L'GM \sigma^2$$

$$2) \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_b \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$ab \times (a+b+1)$

a) $\mu = \underline{\underline{l}}' \beta$ para $\underline{\underline{l}}' = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$
 $1 \times (a+b+1)$

Supondo que μ é estimável então

$$(1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) = \begin{bmatrix} t_{11} \dots t_{1b} & t_{21} \dots t_{2b} & \dots & t_{a1} \dots t_{ab} \end{bmatrix} X \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b t_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^b t_{1j} = \sum_{j=1}^b t_{2j} = \dots = \sum_{j=1}^b t_{aj} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b t_{ij} = 0 \\ \sum_{i=1}^a t_{i1} = \sum_{i=1}^a t_{i2} = \dots = \sum_{i=1}^a t_{ib} = 0 \end{array} \right.$$

incompatível
com a 1ª equação

$\therefore \mu$ não é estimável

b) $\underline{\underline{l}}' = (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ésima posição}}}{1} 0 \dots 0)$, De maneira análoga ao anterior

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b t_{ij} = 0 \\ \sum_{j=1}^b t_{1j} = 0 \quad \sum_{j=1}^b t_{2j} = 0 \quad \dots \quad \sum_{j=1}^b t_{k-1j} = 0 \quad \sum_{j=1}^b t_{k+1j} = 0 \quad \dots \quad \sum_{j=1}^b t_{aj} = 0 \\ \sum_{i=1}^a t_{ik} = 1 \end{array} \right.$$

As a última equações implicam

em $\sum \sum t_{ij} = 1$, que é incompatível com a 1ª.

∴ α_k não é estimável.

c) $\alpha_i - \alpha_p$ é estimável pois

$$\alpha_i - \alpha_p = \mu + \alpha_i + \beta_j - (\mu + \alpha_p + \beta_j) = E(Y_{ij}) - E(Y_{pj})$$

sendo portanto combinação linear de funções estimáveis.

d) $\beta_j - \beta_l = E(Y_{ij}) - E(Y_{il})$ portanto é estimável

e) $\mu + \alpha_i + \beta_j$ é estimável pois coincide com $E(Y_{ij})$

3) $a_1' \beta \quad a_2' \beta \quad \dots \quad a_k' \beta$ estimáveis $\Rightarrow$

$$a_1' = \tilde{x}_1' X \quad a_2' = \tilde{x}_2' X \quad \dots \quad a_k' = \tilde{x}_k' X \Rightarrow$$

$$c_1 a_1' \beta + c_2 a_2' \beta + \dots + c_k a_k' \beta =$$

$$c_1 \tilde{x}_1' X \beta + c_2 \tilde{x}_2' X \beta + \dots + c_k \tilde{x}_k' X \beta =$$

$\sum_{j=1}^k c_j \tilde{x}_j' X \beta$ é estimável porque

$$\sum_{j=1}^k c_j \tilde{x}_j' X \beta = \underline{g}' \beta \quad \text{com } \underline{g}' = \sum_{j=1}^k c_j \tilde{x}_j' X = \tilde{x}' X$$

$$\tilde{x}' X \quad \text{para } \tilde{x}' = \sum_{j=1}^k c_j \tilde{x}_j'$$

4) $g' \beta$ estimável $\Rightarrow \exists \tilde{x}' \mid g' = \tilde{x}' X \Rightarrow g' H = \tilde{x}' X \underbrace{G X' X}_X$

$$\Rightarrow g' H = \tilde{x}' X = g'$$

$$g' H = g' \Rightarrow g' = g' G X' X \Rightarrow g' = \tilde{x}' X \quad \text{para}$$

$$\tilde{x}' = g' G X' \Rightarrow g' \beta \text{ é estimável}$$

$$5) a) X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 74 \\ 68 \\ 77 \\ 60 \\ 76 \\ 80 \\ 70 \\ 85 \\ 93 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} 773 \\ 279 \\ 226 \\ 268 \end{bmatrix}$$

Sistema de equações normais

$$\begin{cases} 10\mu^0 + 4\alpha_1^0 + 3\alpha_2^0 + 3\alpha_3^0 = 773 \\ 4\mu^0 + 4\alpha_1^0 = 279 \\ 3\mu^0 + 3\alpha_2^0 = 226 \\ 3\mu^0 + 3\alpha_3^0 = 268 \end{cases}$$

Uma possível solução: $\mu^0 = 0 \Rightarrow \alpha_3^0 = \frac{268}{3}, \alpha_2^0 = \frac{226}{3}$

$$\alpha_1^0 = \frac{279}{4}$$

$$\beta^0 = \left(0, \frac{279}{4}, \frac{226}{3}, \frac{268}{3} \right)'$$

$$b) X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c) Investimento médio do grupo Colégio incompleto: $\beta_0 +$
 " " " " " Completo: $\beta_0 + \beta_1$
 " " " " " Graduação: $\beta_0 + \beta_2$

Igualdade dos investimentos médios: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 9 & -9 & -9 \\ -9 & 21 & 9 \\ -9 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 773 \\ 226 \\ 268 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 69,75 \\ 5,58 \\ 19,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0 \iff C\beta = m$$

H_a : Pelo menos uma das igualdades não se verifica

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 5,58 \\ 19,58 \end{bmatrix} \quad C(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} -9/36 & 21/36 & 9/36 \\ -9/36 & 9/36 & 21/36 \end{bmatrix}$$

$$C(x'x)^{-1}C' = \begin{bmatrix} 21/36 & 9/36 \\ 9/36 & 21/36 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$[C(x'x)^{-1}C']^{-1} = \frac{36}{360} \begin{bmatrix} 21 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 21 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(C\hat{\beta} - m)' [C(x'x)^{-1}C']^{-1} (C\hat{\beta} - m) =$$

$$\begin{bmatrix} 5,58 & 19,58 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 21 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,58 \\ 19,58 \end{bmatrix} = 673,8$$

$$y'y = 60679 \quad \hat{\beta}'x'y = 60425,27$$

$$W = \frac{673,8/2}{\frac{60679 - 60425,27}{7}} = 9,29$$

$$\alpha = 0,05 \quad F_{2,7} = 4,74$$

Rejeitamos H_0

$$b) a) X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$b) \tau_1 + \tau_2 = \underline{\underline{L}}' \beta \text{ para } \underline{\underline{L}}' = [0 \ 1 \ 1]$$

Para $\tau_1 + \tau_2$ ser estimável, deveríamos ter $\underline{\underline{L}}' = \underline{\underline{t}}' X$

$$[0 \ 1 \ 1] = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_6] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^6 t_i = 0 \quad C \\ \sum_{i=1}^3 t_i = 1 \quad A \\ \sum_{i=4}^6 t_i = 1 \quad B \end{array} \right. \Rightarrow \text{tomando as eq. A e B} \quad \sum_{i=1}^3 t_i + \sum_{i=4}^6 t_i = 2, \text{ que é incompatível com C}$$

$\Rightarrow \tau_1 + \tau_2$ não é estimável.

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 Y_{ij} \\ \sum_{j=1}^3 Y_{1j} \\ \sum_{j=1}^3 Y_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{00} \\ Y_{10} \\ Y_{20} \end{bmatrix}$$

· sistema de equações normais

9

$$\begin{cases} 6\mu^0 + 3\tau_1^0 + 3\tau_2^0 = Y_{..} \\ 3\mu^0 + 3\tau_1^0 = Y_{1.} \\ 3\mu^0 + 3\tau_2^0 = Y_{2.} \end{cases}$$

$$6\bar{Y}_1 + 3(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) = 3\bar{Y}_1 + 3\bar{Y}_2 = Y_{1.} + Y_{2.} = Y_{..}$$

$$3\bar{Y}_1 + 3 \cdot 0 = Y_{1.}$$

$$3\bar{Y}_1 + 3(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) = 3\bar{Y}_2 = Y_{2.}$$

$\therefore (\bar{Y}_1, 0, \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)$ é uma solução do sistema de equações normais

d) $\bar{T}_1 - \bar{T}_2$ é estimável porque

$\bar{T}_1 - \bar{T}_2 = E(Y_{11}) - E(Y_{21})$ e $E(Y_{11})$ e $E(Y_{21})$ são estimáveis.

$\therefore$ Estimador ótimo de $\bar{T}_1 - \bar{T}_2$ é $\hat{\bar{T}_1 - \bar{T}_2} = 0 - (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$

$$\begin{aligned} 7) \beta^0' X' Y &= (\bar{Y}_1, 0, \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) \begin{bmatrix} Y_{..} \\ Y_{1.} \\ Y_{2.} \end{bmatrix} = \bar{Y}_1 Y_{..} + (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) Y_{2.} = \\ &= \bar{Y}_1 (Y_{1.} + Y_{2.}) + \bar{Y}_2 Y_{2.} - \bar{Y}_1 Y_{2.} = \bar{Y}_1 Y_{1.} + \bar{Y}_2 Y_{2.} \\ 8) \beta^0' X' Y &= (0, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2) \begin{bmatrix} Y_{..} \\ Y_{1.} \\ Y_{2.} \end{bmatrix} = \bar{Y}_1 Y_{1.} + \bar{Y}_2 Y_{2.} \end{aligned}$$

No exemplo 13.5.3, $K=4$ e como $X'X\beta$ é estimável, devemos procurar 4 equações LI no sistema $X'X\hat{\beta} = X'y$.

Observa-se que $\text{eq 1} = \text{eq 2} + \text{eq 3}$
 $\text{eq 1} = \text{eq 4} + \text{eq 5} + \text{eq 6}$

As eq 3, 4, 5 e 6 são LI.

i. $9\beta_0 + 9\beta_2 + 3\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5$, $6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_3$,

$6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_4$ e $6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_5$

formam uma base para o conjunto de funções estimáveis nesse modelo.

$$\beta_3 + 2\beta_4 - 3\beta_5 = a_1(9\beta_0 + 9\beta_2 + 3\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5) + a_2(6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_3) + a_3(6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_4) + a_4(6\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_5) =$$

$$\beta_0(9a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4) + \beta_1(3a_2 + 3a_3 + 3a_4) + \beta_2(9a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4) + \beta_3(3a_1 + 6a_2) + \beta_4(3a_1 + 6a_3) + \beta_5(3a_1 + 6a_4).$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 6a_2 = 1 \\ 3a_1 + 6a_3 = 2 \\ 3a_1 + 6a_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow 9a_1 + 6a_2 + 6a_3 + 6a_4 = 0$$

$$9a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4 = 0 \quad (\text{IV})$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1 - 3a_1}{6} \quad a_3 = \frac{2 - 3a_1}{6} \quad a_4 = \frac{-3 - 3a_1}{6} \quad ||$$

Substituindo em IV

$$9a_1 + 3 \frac{1 - 3a_1}{6} + 3 \frac{2 - 3a_1}{6} + 3 \frac{-3 - 3a_1}{6} = 0$$

$$54a_1 - 9a_1 - 9a_1 - 9a_1 = -3 - 6 + 9$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{2}{6}, \quad a_4 = -\frac{3}{6}$$

Para esses valores $3a_2 + 3a_3 + 3a_4 = 3\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = 0$,
que é o coeficiente de β_1 .

Portanto, $\beta_3 + 2\beta_4 - 3\beta_5$ é estimável.

10') No modelo de análise de variância com um fator, obtém-se a distribuição de probabilidades do estimador do contraste $\sum_{i=1}^a x_i d_i$, $\sum_{i=1}^a x_i = 0$. Usando o fato

que $\frac{(n-a)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-a}^2$, derive o teste de hipóteses

para $H_0: \sum x_i \alpha_i = 0$.

10) No modelo de análise de variância com um fator $\sum x_i d_i$ com $\sum x_i = 0$ e ϵ estimável.

$$\sum_{i=1}^a x_i d_i = \underline{\underline{\ell}}' \underline{\underline{\beta}} \quad \text{para } \underline{\underline{\ell}}' = [0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_a]'$$

$$\underline{\underline{\beta}} = [\mu, d_1, d_2, \dots, d_a]'$$

$\hat{\underline{\underline{\beta}}}^0 = [0 \ \bar{y}_1 \ \bar{y}_2 \ \dots \ \bar{y}_a]'$ é uma solução do sistema de equações normais.

$\sum x_i d_i$ estimável $\Rightarrow \underline{\underline{\ell}}' \hat{\underline{\underline{\beta}}}^0$ é invariante $\forall \hat{\underline{\underline{\beta}}}^*$ solução do sistema de equações normais e pelo teorema 4

$$\underline{\underline{\ell}}' \hat{\underline{\underline{\beta}}}^* \sim N(\underline{\underline{\ell}}' \underline{\underline{\beta}}, \sigma^2 \underline{\underline{\ell}}' (X'X)^{-1} \underline{\underline{\ell}}).$$

$$\underline{\underline{\ell}}' \hat{\underline{\underline{\beta}}}^* = \sum x_i \bar{y}_i \quad \underline{\underline{\ell}}' \underline{\underline{\beta}} = \sum x_i d_i$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \dots & n_a \\ n_1 & n_1 & 0 & \dots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ n_a & 0 & 0 & \dots & n_a \end{bmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/n_a \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\ell}}' (X'X)^{-1} \underline{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_1}{n_1} & \frac{x_2}{n_2} & \dots & \frac{x_a}{n_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_a \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^a \frac{x_i^2}{n_i}$$

$$\therefore \sum c_i \bar{Y}_i \sim N\left(\sum_{i=1}^a c_i \alpha_i, \sigma^2 \sum \frac{c_i^2}{n_i}\right).$$

Teorema 4 $\Rightarrow \sum c_i \bar{Y}_i$ e $\frac{(n-a)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-a}^2$ são independentes.

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^a c_i \alpha_i}{\sigma \sqrt{\sum \frac{c_i^2}{n_i}}} \sim N(0,1)$$

$$\text{e} \quad \frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^a c_i \alpha_i}{\sigma \sqrt{\sum \frac{c_i^2}{n_i}}} \sim t_{n-a}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^a c_i \alpha_i}{\sqrt{\frac{(n-a)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2(n-a)}}} \sim t_{n-a}$$

Sob $H_0: \sum c_i \alpha_i = 0$

$$Q = \frac{\sum c_i \bar{Y}_i - 0}{\sqrt{\sum c_i^2 / n_i}} \sim t_{n-a}$$

$$\frac{\sum c_i \bar{Y}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \sim t_{n-a}$$

Rejeita-se H_0 (contra $H_a: \sum c_i \alpha_i \neq 0$) se

$$|Q| > t_c \quad t_c \mid P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - \alpha,$$

$t \sim t_{n-a}$! α - nível de significância do teste.

11) Considere o modelo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$, $j=1, 2, \dots, n_i$
 $i=1, 2, 3$, $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ variáveis aleatórias independentes.

a) Utilizando o exercício 10' obtenha o teste de hipóteses para $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$.

b) Derive o teste da razão de verossimilhança generalizada para $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$.

c) Prove que os testes dos itens a) e b) são equivalentes.

1) a) $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0$

14

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \sum_{i=1}^n c_i d_i \quad c_1 = 1 \quad c_2 = -1 \quad c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$$

Estatística do teste

$$Q = \frac{\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{(n-3) \hat{\sigma}^2}}$$

RC $|Q| > t_c \quad P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - \alpha$
 $t \sim t_{n-\alpha}$

b) $H_0: C\beta = m$ $C = [0 \ 1 \ -1 \ 0]$ $\beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$
 $\Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ $m = 0$ $\Delta = 1$

$$W = \frac{(C\hat{\beta}^* - m)' [C(X'X)^{-1}C']^{-1} (C\hat{\beta}^* - m)}{\hat{\sigma}^2}$$

$$C\hat{\beta}^* - m = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$$

$$C(X'X)^{-1}C' = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i^2}{n_i}$$

erro

$$C(X'X)^{-1}C' = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

erro

$$W = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)^2}{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right]}$$

Rejeita-se H_0 para $W > w, w$

15

$$P(F_{1, n-a} > w) = \alpha$$

c) Para $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$, a estatística Q do ex 10 fica

$$Q = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{\frac{1/n_1 + 1/n_2}{\hat{\sigma}^2}}} \quad \text{RC } |Q| > t_c$$

este teste é equivalente a rejeitar $H_0 \Leftrightarrow$

$$Q^2 > t_{c, n-a}^2 \Leftrightarrow \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)^2}{\frac{1/n_1 + 1/n_2}{\hat{\sigma}^2}} > F_{c, 1, n-a}$$

que é o teste do item a).

Como $F_{c, 1, n-a} = t_{c, n-a}^2$ pois a dist F com 1 gl no numerador e $n-a$ no denominador é o quadrado da estatística t com $n-a$ gl, vale a equivalência.

$$8) \quad X \beta = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} x_1' \beta \\ x_2' \beta \\ \vdots \\ x_n' \beta \end{bmatrix}$$

$x_i' \beta$ é estimável, $i = 1, 2, \dots, n$

$$X' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

$p \times n$

$$X'X\beta = \begin{bmatrix} a_{11} x_1' \beta + a_{12} x_2' \beta + \dots + a_{1n} x_n' \beta \\ \downarrow \\ \text{estimável p.q é comb. linear de} \\ \text{funções estimáveis} \\ \rightarrow \text{estimável} \\ \rightarrow \text{estimável} \end{bmatrix}$$

12) Os dados a seguir correspondem à resistência de certo material produzido por quatro diferentes máquinas A, B, C e D.

	A	B	C	D
1	6	5	9	12
2	4	7	9	8
3	5	6		

- Teste a hipótese de igualdade das resistências médias do material produzido pelas quatro máquinas.
- Teste a hipótese de igualdade das resistências médias para as máquinas A e B.
- Construa um intervalo de confiança com coeficiente 0,95 para a resistência média do material produzido pela máquina D.

12) a) Modelo de Análise de Variância com um fator

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \\ \text{indep}$$

$$j = 1, 2, \dots, n_i \quad n_1 = 3 \quad n_2 = 3 \quad n_3 = n_4 = 2$$

Teste de Igualdade de Médias

$$H_0: \mu + \alpha_1 = \mu + \alpha_2 = \mu + \alpha_3 = \mu + \alpha_4$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \quad \dots \quad \alpha_1 - \alpha_4 = 0$$

Estatística de teste

$$W = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 / (a-1)}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 / (n-a)} = \frac{SRE/3}{SAD/6} =$$

$$= \frac{40,90/3}{12/6} = 6,82$$

$$F_{3,6,0,05} = 4,76$$

Rejeitamos H_0

$$b) H_0: \mu + \alpha_1 = \mu + \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

Utilizando a estatística W de ex. 11 b)

$$n_1 = 3 \quad n_2 = 3$$

$$\bar{Y}_1 = 5 \quad \bar{Y}_2 = 6 \quad \hat{\sigma}^2 = 12/6 = 2$$

$$W = \frac{(5-6)^2 / 2/3}{2} = \frac{3}{4} \quad F_{c,1,6} = 5,99 \quad \alpha = 0,05$$

Não rejeitamos H_0 .

$$c) \text{ IC para } \mu + \alpha_4 = E(Y_{4j})$$

$\mu + \alpha_4$ é estimável porque $\mu + \alpha_4 = E(Y_{4j})$

$$\hat{\mu + \alpha_4} = \bar{Y}_4 = 10 \quad \bar{Y}_4 - \text{estimador NVUVM de } \mu + \alpha_4$$

IC para $\mu + \alpha_4$

$$\bar{Y}_4 \pm t_{\alpha/2, 16} \sqrt{\hat{\text{Var}}(\bar{Y}_4)}$$

$$\gamma = 0,95$$

$$t_{\alpha/2, 16} = 2,447$$

$$\hat{\text{Var}}(\bar{Y}_4) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n_4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{IC } 10 \pm 2,447 \sqrt{1} = [7,553, 12,447]$$

10) a) $r(X) < 4$ porque a soma das colunas 2 e 3 é igual à coluna 1. 19

$r(X) = 3$ porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 (\neq 0)$$

Portanto, o número máximo de funções estimáveis LI neste modelo é $r(X) = 3$.

b) β é estimável porque

$$\beta = E(Y_{12}) - E(Y_{11}) = \mu + \alpha_1 + \beta \cdot 2 - (\mu + \alpha_1 + \beta \cdot 1)$$

é diferença de funções estimáveis.

$$\text{modelo: } Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta x_j \quad i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4.$$