Lista de Exercícios para Avaliação II

① Considere um espaço-tempo plano 1+2 dimensional.

(a) Obtenha 6 campos de Killing independentes e calcule seus comutadores (expressando os resultados como combinação dos próprios campos de Killing);

(b) Se T_{ab} é um tensor energia-momentum satisfazendo $\nabla_a T^{ab} = 0$, calcule as quantidades conservadas associadas a cada um dos campos de Killing anteriores e interprete o significado dessas leis de conservação.

② Considere uma distribuição estática e esfericamente simétrica de matéria incompressível, com densidade própria ρ_0 e raio R.

(a) Resolva a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinando a pressão ao longo dessa distribuição e, em particular, a pressão no ponto central;

(b) Lembrando que, por continuidade da métrica, $M := 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho_0$ é a massa gravitacional total do sistema em relação a observadores parados no infinito, obtenha uma expressão para a energia de ligação dessa distribuição de matéria e calcule-a para $GM/R \ll 1$. Compare com a energia de ligação gravitacional que é obtida em gravitação newtoniana;

(c) Determine o menor valor possível para $R/(GM)$ e, com isso, o maior valor possível de energia de ligação. Expresse o resultado da energia de ligação máxima em termos da massa própria.

③ Referente ao espaço-tempo de Schwarzschild, pergunta-se:

(a) Qual o intervalo de tempo-próprio decorrido para um observador que cai radialmente em direção a um buraco negro, tendo partido do repouso de uma posição arbitrariamente próxima ao horizonte de eventos, até atingir a singularidade? *Estime* esse valor (em unidades quotidianas de tempo) no caso de um buraco negro com aproximadamente 3 massas solares e para outro com aproximadamente 3×10^6 massas solares (como o do centro da nossa galáxia);

(b) Nesses dois casos, estime a força de maré que age sobre o observador quando ele cruza radialmente o horizonte de eventos. (Para essa estimativa, considere que cada metade do corpo do observador é como se fosse uma massa de cerca de 50 kg separadas por uma distância típica de 1 m.)

④ Um feixe paralelo de luz vindo do infinito com seção transversal circular de raio a se dirige a um buraco negro de massa M, com o centro do feixe exatamente na direção radial. Define-se a *seção de choque* de captura do buraco negro como sendo a maior área de seção transversal desse feixe que é completamente engolido pelo buraco, $\sigma = \pi a_{max}^2$. Calcule o valor dessa seção de choque.

⑤ Duas espaçonaves, com seus propulsores ligados, encontram-se paradas na mesma posição, em $r = R$, nas vizinhanças de um buraco negro de massa M. Em $t = 0$, uma dessas espaçonaves diminui a potência de seus propulsores de modo a iniciar um mergulho radial em direção ao buraco negro, mas seguindo uma linha-de-mundo que é uma *linha reta num diagrama de Kruskal*. Considerando que a posição inicial R satisfaz

$$e^{R/(4GM)}\sqrt{\frac{R}{2GM}-1} = a,$$

onde a é uma constante positiva, pede-se:

(a) Esquematize, num diagrama de Kruskal, as linhas-de-mundo de ambas as espaçonaves;

(b) Qual o maior valor da coordenada temporal de Schwarzschild, $t = t_{max}$, para o qual um raio de luz emitido nesse instante pela espaçonave em $r = R$ ainda consegue ser recebido pela espaçonave que mergulhou no buraco negro?

(c) Qual o comportamento de t_{max} para $a \ll 1$ e, em particular, seu valor para $a \to 0$? Qual o tempo-próprio decorrido para a espaçonave parada em $r = R$ entre o mergulho de sua companheira e a emissão desse último sinal (nesse regime $a \ll 1$ e $a \to 0$)?

⑥ Considere um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico que contém apenas uma componente energética, com equação de estado $p/\rho = w =$ constante. Sejam ρ_0 e a_0 os valores da densidade de energia $\rho(t)$

e do fator de escala $a(t)$ no instante $t = t_0$ (t sendo o tempo próprio dos observadores que vêem isotropia).

(a) Mostre que $\rho(t) = \rho_0 \left[a_0/a(t)\right]^{3(1+w)}$;

(b) Se $H_0 > 0$ é a "constante de Hubble" no instante $t = t_0$ (ou seja, $H_0 = [\dot{a}(t)/a(t)]|_{t=t_0}$), determine a condição, envolvendo ρ_0, a_0 e H_0, que determina qual a geometria da seção espacial desse modelo;

(c) Supondo que a seção espacial seja plana, determine a função $a(t)$ para $w = 0$ (matéria não-relativística; "poeira"), para $w = 1/3$ (matéria relativística; "radiação") e para $w = -1$ (constante cosmológica; "energia escura" ou "energia do vácuo"). Em cada um desses casos, determine a idade do universo em termos de H_0, contada desde o momento em que $a = 0$;

(d) Calcule o parâmetro de desaceleração $q := -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = -(\ddot{a}/a)/H^2$ para cada um dos casos analisados no item anterior, deixando claro em qual(is) caso(s) há aceleração e em qual(is) há desaceleração da expansão.

⑦ Introduzindo a chamada *densidade crítica* $\rho_c := 3H^2/(8\pi G)$, define-se o *parâmetro de densidade* como sendo a fração $\Omega := \rho/\rho_c$.

(a) Mostre que a equação de Friedmann para o parâmetro de Hubble H é rescrita como
$$\Omega + \Omega_k = 1,$$
onde $\Omega_k := -k/(a^2H^2)$;

(b) Mostre que a equação de Friedmann para a aceleração $\ddot{a}$ é rescrita como
$$q = \frac{(1-\Omega_k)}{2}(1+3w),$$
onde q é o parâmetro de desaceleração e $w := p/\rho$

(c) Num universo com várias componentes energéticas ρ_j, cada uma com equação de estado w_j constante, mostre que a equação de Friedmann para o parâmetro de Hubble H, escrita em termos dos parâmetros atuais (ou seja, medidos em $t = t_0$), assume a forma
$$H(t)^2 = H_0^2\left[\sum_j \Omega_{j0}\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{3(1+w_j)} + \Omega_{k0}\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^2\right],$$
onde os subscritos "0" indicam o valor do parâmetro em $t = t_0$;

(d) Com base na equação anterior, explique qual componente energética (com equação de estado w_j maior ou menor) deve dominar a dinâmica do universo nos regimes em que $a(t)/a_0 \ll 1$ e $a(t)/a_0 \gg 1$ (supondo que esses regimes sejam atingidos).

⑧ Num espaço-tempo com a métrica de FLRW, considere uma linha-demundo cujo vetor tangente p^a satisfaz $p^b \nabla_b p^a = 0$. Seja $p_\parallel(t)$ a norma da projeção de p^a sobre as superfícies Σ_t de homogeneidade e isotropia: $p_\parallel(t) = \sqrt{h_{ab} p^a p^b}$, onde $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$, com u^a sendo a 4-velocidade dos observadores que vêem isotrópia ("observadores isotrópicos", por simplicidade).

(a) Mostre que $p_\parallel(t) a(t) =$ constante ao longo da linha-de-mundo;

(b) O que o resultado acima implica para o 3-momentum de uma partícula livre evoluindo nesse espaço-tempo, assim como medido pelos "observadores isotrópicos"?

(c) Com base nos resultados anteriores, mostre que um fóton emitido num instante $t < t_0$ com frequência f_e (medida pelos "observadores isotrópicos") é observado hoje com frequência f_0 (medida pelos "observadores isotrópicos") dada por

$$f_0 = f_e \, \frac{a(t)}{a_0}.$$

Com isso, mostre que o fator de "redshift" cosmológico $z := (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ é independente de frequência e satisfaz $1 + z = a_0/a(t)$;

(d) Expresse o parâmetro de Hubble como função do "redshift" cosmológico, $H(z)$, e, em seguida, expanda $H(z)$, em torno de $z = 0$, até primeira ordem em z;

⑨ Considere o modelo de FLRW nas coordenadas $\{(t, \chi, \theta, \varphi)\}$ nas quais

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left\{ d\chi^2 + f(\chi)^2 [d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2] \right\},$$

com $f(\chi) = \sinh\chi, \chi, \sin\chi$ para $k = -1, 0, 1$, respectivamente. Pedese:

(a) Obtenha uma expressão, em forma integral, para $\chi(z)$ que determina o cone-de-luz passado de um observador em $t = t_0$ e $\chi = 0$, em função do "redshift" cosmológico z;

(b) Supondo seção espacial plana e que há apenas uma única componente energética, com equação de estado $w =$ constante, determine o raio do *horizonte de partículas* no instante $t = t_0$;

(c) Sob as mesmas hipóteses do item anterior, qual o maior raio físico que o cone-de-luz passado do observador em $t = t_0$ atinge e em que instante isso acontece?

⑩ As definições de distância luminosa d_L e de distância angular d_A levam às seguintes expressões para essas quantidades, em função do "redshift" cosmológico z:

$$d_L(z) = (1+z)a_0 f(\chi(z)),$$

$$d_A(z) = \frac{a_0}{(1+z)} f(\chi(z)),$$

onde $f(\chi) = \sinh\chi, \chi, \sin\chi$ para $k = -1, 0, 1$, respectivamente, e $\chi(z) = a_0^{-1} \int_0^z d\bar{z}/H(\bar{z})$ (vide item (a) do exercício anterior).

(a) Expanda ambas as expressões, em torno de $z = 0$, até primeira ordem em z, e mostre que a relação da Lei de Hubble observacional, $z = H_0\, d$, é igualmente válida para ambas as definições de distância;

(b) No caso de seção espacial plana e apenas uma componente energética (com equação de estado $w =$ constante), calcule o primeiro desvio da Lei de Hubble observacional,

$$z = H_0\, d + C d^2 + \mathcal{O}(d^3),$$

obtendo a constante C explicitamente (tanto para $d \equiv d_L$, quanto para $d \equiv d_A$) e mostrando que ela fornece informação sobre o parâmetro de desaceleração atual q_0 (que neste caso é constante; vide item (b) do exercício ⑦).