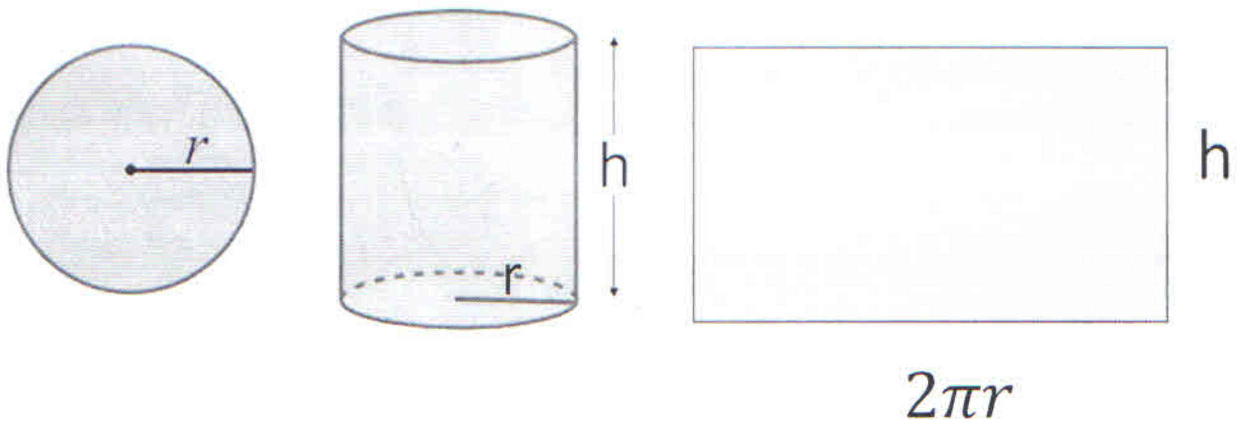
EXERCÍCIOS SOBRE VALORES EXTREMOS – OTIMIZAÇÃO

1- Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica com tampa, com volume V, de forma que sua área total seja mínima.



A área será correspondente a:

$$S_l = 2\pi r h$$
$$S_b = 2\pi r^2$$

Então tem-se:

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Esta expressão depende de duas variáveis o raio e a altura, mas neste caso o volume será fixo.

$V = cte$

$V = S_b . h$

$V = \pi r^2 . h$

$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$$S_{(R)} = 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{V}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} + 2\pi r^2$$

$$S_{(R)} = 2 V r^{-1} + 2\pi r^2$$

$$S'_{(R)} = \frac{d S_{(R)}}{dR} = -2 V r^{-2} + 4\pi r^2$$

$$S'_{(R)} = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r^2$$

$$S'_{(R)} = \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2} \; ; \; \underline{S'_{(R)} = 0}$$

$$-2V + 4\pi r^3 = 0$$

$$4\pi r^3 = 2V$$

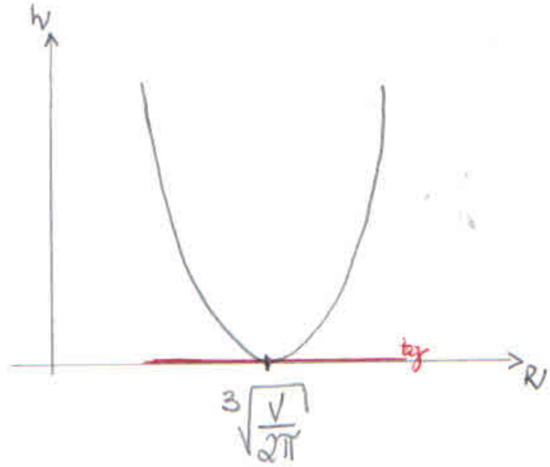
$$r^3 = \frac{2V}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

<u>Estudo do sinal</u>

$S'(R) < 0$ $\qquad$ $S'(R) > 0$

$- - - - - - \quad \underset{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{|} \quad + + + + +$



Como $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, tem-se:

$$h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{2^2\pi^2}}}$$

$$h = \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V^2 \pi^{3}}{4 \cancel{\pi^2}}}} = \frac{V}{\frac{\sqrt[3]{V^2\pi}}{\sqrt[3]{4}}}$$

$$h = \frac{V \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{V^2\pi}} = \sqrt{\frac{4V^{3}}{\cancel{V^2}\pi}}$$

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}$$

Para que o volume seja mínimo,

$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \quad \text{e} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

A partir da primeira derivada,

$$S'_{(R)} = \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2} \quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

$u = -2V + 4\pi r^3$

$u' = 12\pi r^2$

$v = r^2$

$v' = 2r$

$$S''_{(R)} = \frac{12\pi r^4 - (-4Vr + 8\pi r^4)}{r^4}$$

$$S''_{(R)} = \frac{12\pi r^4 + 4Vr - 8\pi r^4}{r^4} = \frac{4\pi r^4 + 4Vr}{r^4}$$

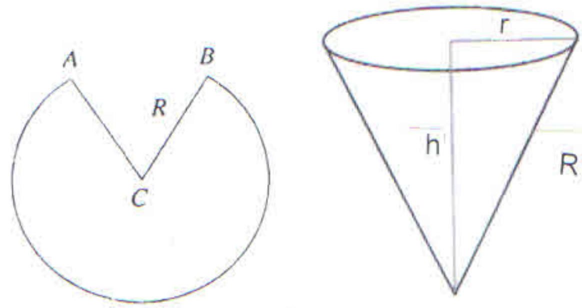
$$S''_{(R)} = \frac{\cancel{r}(4\pi r^3 + 4V)}{r^{\cancel{4}}} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$S''_{(R)} = 4\pi + \underbrace{\frac{4V}{r^3}}$$

para $r > 0$ a expressão é positiva

$$S''_{(R)} > 0$$

2- Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio r, cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



Consideraremos o volume do cone:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad R^2 = r^2 + h^2$$

$$V(r,h) = V$$

$$r^2 = R^2 - h^2$$

$$V(h) = \frac{\pi (R^2 - h^2) . h}{3}$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 h - h^3)$$

$$V'(h)_1 = \frac{dV(h)}{dh} = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) \; ; \; V'(h) = 0$$

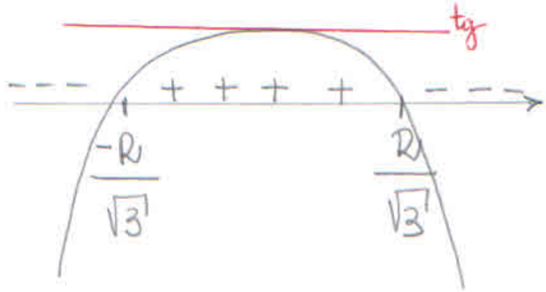
$$\frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) = 0$$

$$R^2\pi - 3h^2\pi = 0$$

$$R^2\pi = 3h^2\pi$$

$$h^2 = \frac{R^2\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{R^2}{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}} \; ; \text{ então } h = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}$$



$$r^2 = R^2 - h^2$$
$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$
$$r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}}$$
$$r = \sqrt{\frac{3R^2 - R^2}{3}}$$
$$r = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Como $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

$$V = \frac{\pi \dfrac{R^2 \cdot 2}{3} \cdot \dfrac{R}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R^3}{9\sqrt{3}}$$

$$V'(h) = \frac{\pi R^2 - 3\pi h^2}{3}$$

$u = \pi R^2 - 3\pi h^2$ $\quad v = 3$
$u' = -6\pi h$ $\quad v' = 0$

$$V''(h) = \frac{-18\pi h}{9} = -2\pi h$$

3- Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área de superfície para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por:

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 cotg\theta + \left(\frac{3s^2\sqrt{3}}{2}\right) cossec\theta,$$

Onde s, o comprimento dos lados do hexágono e h, a altura, são constantes.

a- Calcular ds/dθ

b- O ângulo que as abelhas deveriam preferir

c- Determinar a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h)

$d(cotg\,u) = -cossec^2 u\, du \qquad d(cossec\,u) = -cossec\,u \cdot cotg\,u\,du$

a) $\frac{ds}{d\theta} = \frac{3s^2}{2} cossec^2\theta - \frac{3s^2\sqrt{3}}{2} cossec\theta \cdot cotg\theta$

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{3s^2}{2} cossec\theta \cdot (cossec\theta - \sqrt{3}\, cotg\theta); \quad \frac{ds}{d\theta} = 0$

$cossec\theta = 0 \quad \theta = 0 \nexists \; ; \; cossec\,0 = \infty$

$cossec\theta - \sqrt{3}\, cotg\theta = 0$

$\frac{1}{sen\theta} - \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{sen\theta} = 0$

$\frac{1 - \sqrt{3}\cos\theta}{sen\theta} = 0$

$1 = \sqrt{3}\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⤳ Ponto de mínimo

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Voltando na expressão S:

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg}\theta + \frac{3s^2\sqrt{3}}{2}\operatorname{cossec}\theta$$

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3s^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$S = 6sh - \frac{3s^2}{2\sqrt{2}} + \frac{9s^2}{2\sqrt{2}}$$

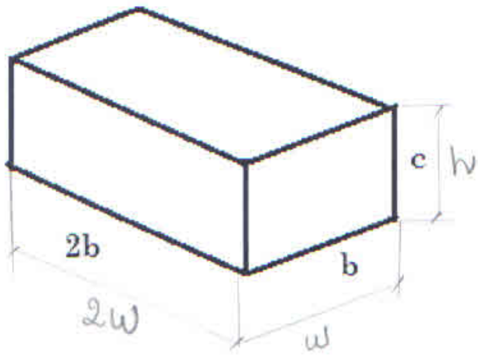
$$S = 6sh + \left(\frac{-3s^2 + 9s^2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$S = 6sh + \frac{6s^2}{2\sqrt{2}}$$

b) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 54{,}74 \approx 55^\circ$

c) $S = 6s\left(h + \frac{s}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$ área da superfície mínima.

4- Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $10,00 por m^2. O material para os lados custa $6,00 por m^2. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêiners.



$V = S_b \cdot h$

$V = 2w \cdot w \cdot h$

$V = 2w^2 h$

$10 = 2w^2 h$

$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$

2b - comprimento
b - largura
c - altura

Custo do Contêiner:

$$C_{cont} = \underbrace{10(2w^2)}_{\text{Custo da base}} + \underbrace{6[2(2wh) + 2(wh)]}_{\text{Custo dos lados}}$$

$$C_{cont} = 20w^2 + 24wh + 12wh$$

$$C_{cont} = 20w^2 + 36wh$$

$$C_{cont} = 20w^2 + 36\cancel{w} \cdot \frac{5}{w^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{C_{cont} = 20w^2 + \frac{180}{w}} \; ; \; C'_{cont}$$

$$C'_{cont} = 40w - \frac{180}{w^2} \; ; \; C'_{cont} = 0$$

$$40w - \frac{180}{w^2} = 0$$

$$\frac{40w^3 - 180}{w^2} = 0$$

$$40w^3 - 180 = 0$$

$$40\left(w^3 - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$w^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow w = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

$$- \; - \; - \; - \quad + \; + \; + \; +$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

O mín. absoluto será $w = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$, desde que $C'_{cont} < 0$ para:

$$0 < w < \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

se $C'_{cont} > 0$ tem-se $w > \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

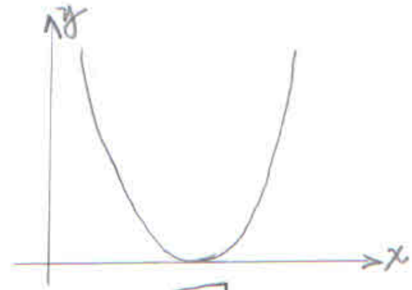
Analisando a segunda derivada:

$$C'_{cont} = 40w - \frac{180}{w^2}$$

$$C'_{cont} = 40w - 180w^{-2}$$

$$C''_{cont} = 40 + 360w^{-3}$$

$$C''_{cont} > 0 \;\; \cup$$



$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} \rightarrow$ Ponto de mínimo

De acordo com a eq. do custo:

$$C_{cont} = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

$$C_{cont} = 20\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^2 + \frac{180}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$$

$$C_{cont}\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right) \approx 163{,}53$$