

5.4. Abordagem de Modelos Lineares via Projeções

$$\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

Produto Interno

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}' \underline{v}$$

$$\| \underline{u} \| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} = \sqrt{\underline{u}' \underline{u}}$$

Base

$V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão p .

A matriz $n \times p$ X é uma matriz base de V se suas colunas formam uma base para V .

$$\underline{v} \in V \iff \underline{v} = X \underline{b} \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^p$$

$$(\underline{v} = \underline{x}_1 b_1 + \underline{x}_2 b_2 + \dots + \underline{x}_p b_p)$$

$$X = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_p]$$

Vetores Ortogonais (Ortogonalidade)

i) $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{u}$ é ortogonal a $\underline{v}$ ($\underline{u} \perp \underline{v}$) se

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$$

ii) $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^n$ V subespaço

$\underline{u}$ é ortogonal a V ($\underline{u} \perp V$) se $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0 \quad \forall \underline{v} \in V$

iii) U e V subespaços de $\mathbb{R}^n$

U é ortogonal a V ($U \perp V$) se $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0 \quad \forall \underline{v} \in V$
 $\underline{u} \in U$

Def

V subespaço de $\mathbb{R}^n$

$V^\perp$ - conjunto de todos os vetores ortogonais a V

$V \perp W = V \cap W^\perp$ - conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W

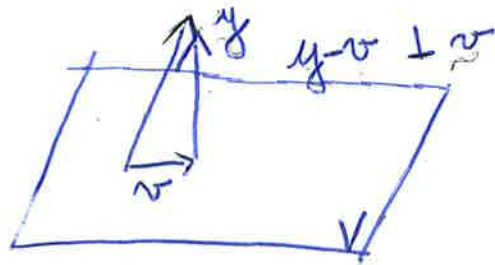
Def

Sejam $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ e V subespaço de $\mathbb{R}^n$.

A projeção de $\underline{y}$ em V é um vetor $\underline{v}$ tal que

i) $\underline{v} \in V$

ii) $\underline{y} - \underline{v} \in V^\perp$



Notação: Projeção de $\underline{y}$ em V : $P_V \underline{y}$

Resultado

Se X é uma matriz base de V , a projeção de y em V é dada por

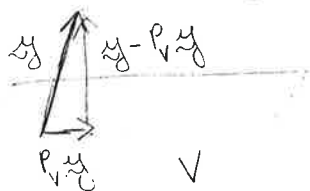
$$P_V y = X (X'X)^{-1} X' y$$

$P_V = X (X'X)^{-1} X'$ é chamada matriz de projeção no subespaço V

Teorema 1

$$a) \quad z \in V \Rightarrow \|y - z\|^2 = \|y - P_V y\|^2 + \|P_V y - z\|^2$$

Teorema de Pitágoras



$$b) \quad \|y - P_V y\|^2 \leq \|y - z\|^2 \quad \forall z \in V, \text{ valendo a}$$

igualdade por $z = P_V y$

$$f) \quad P_{V^\perp} y = y - P_V y$$

$$P_{V^\perp} = I - P_V$$

$$c) \quad \left. \begin{aligned} P_V y &= y \iff y \in V \\ P_V y &= 0 \iff y \in V^\perp \end{aligned} \right\}$$

$$d) \quad P_V^2 = P_V, \quad P_V' = P_V$$

$$e) \quad \text{se } \dim V = p \text{ então } \text{tr } P_V = p$$

4

$\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ vetor aleatório n -dimensional

Teorema 2 Arnold (Teorema 3.11 e 3.12)

Se $\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$ e V é um subespaço p -dimensional de $\mathbb{R}^n$, então

i) $P_V \underline{Y} \sim N_n(P_V \underline{\mu}, \sigma^2 P_V)$

ii) Se $V \perp W$, então $P_V \underline{Y}$ e $P_W \underline{Y}$ são vetores aleatórios independentes

iii) $\frac{\|P_V \underline{Y}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi_p^2 \left(\frac{\|P_V \underline{\mu}\|^2}{2\sigma^2} \right)$

Def : Modelo Linear

V subespaço de $\mathbb{R}^n$ p -dimensional

O modelo

$$\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I) \quad \underline{\mu} \in V \quad \sigma^2 > 0$$

é um modelo linear.

Se X é uma matriz $n \times p$ de posto p tal que

$$\underline{y} = X\beta \quad \left(\underline{y} \sim N_n(X\beta, \sigma^2 I) \right), \text{ o modelo é}$$

dito *Coordenado*. Caso contrário, dizemos que temos um *Modelo de Coordenadas Livres*.

Ex 1

$$y_1, \dots, y_n \text{ independentes} \quad y_i \sim N(\theta, \sigma^2)$$

$$-\infty < \theta < \infty \quad \sigma^2 > 0$$

$$\underline{y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$$

$$\underline{\mu} \in V, \quad V = \{(\theta, \theta, \dots, \theta), \theta \in \mathbb{R}\}$$

Ex 2

$$y_i \sim N(x_i' \beta, \sigma^2)$$

$$\underline{y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I) \quad \underline{\mu} \in \{ \underline{v} \mid \underline{v} = X\beta \}$$

Teorema 3 (Teorema 6.1 Arnold)

No modelo $\underline{y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$ $\underline{\mu} \in V$ $\sigma^2 > 0$, sejam

$$\hat{\underline{\mu}} = P_V \underline{y}$$

V subespaço p dimensional
de $\mathbb{R}^n$.

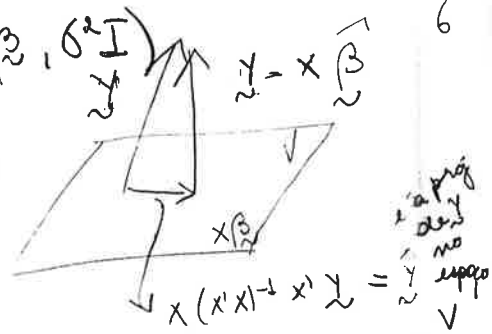
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|P_{V^\perp} \underline{y}\|^2}{n-p} = \frac{\|\underline{y} - P_V \underline{y}\|^2}{n-p}$$

Nestas condições $\hat{\underline{\mu}}$ e $\hat{\sigma}^2$ são os estimadores MVUVM de $\underline{\mu}$ e σ^2

No modelo coordenado, $\underline{y} \sim N_m(X\beta, \sigma^2 I)$

$$\underline{\mu} = X\beta \quad V = \{ \underline{\mu} \mid \underline{\mu} = X\beta \}$$

$$P_V = X(X'X)^{-1}X' \quad (\text{Teorema 2.4 Arnold})$$



$$1) \hat{\underline{\mu}} = X(X'X)^{-1}X'\underline{y}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'\underline{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\underline{y} - X(X'X)^{-1}X'\underline{y}\|^2}{n-p} = \frac{\|\underline{y} - X\hat{\beta}\|^2}{n-p}$$

$$= \frac{(\underline{y}' - X\hat{\beta}')(\underline{y} - X\hat{\beta})}{n-p}$$

da condição b)

$$\|\underline{y} - P_V \underline{y}\|^2 \leq \|\underline{y} - \underline{v}\|^2$$

✓ $\underline{v} \in V$

$$\|\underline{y} - X\hat{\beta}\|^2 = \sum e_i^2$$

é mínima

2) $\hat{\underline{\mu}}$ é ótimo de $\underline{L}'\underline{\mu}$.

$$\underline{L}'\hat{\underline{\mu}} = \underline{L}'X(X'X)^{-1}X'\underline{y} \text{ é ótimo de } \underline{L}'X\beta.$$

$$3) \frac{\|P_V \underline{y}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi_p^2 \left(\frac{\|P_V \underline{\mu}\|^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$P_V \underline{\mu} = X(X'X)^{-1}X'\underline{\mu}$$

$$\|P_V \underline{\mu}\|^2 = \underline{\mu}'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'\underline{\mu}$$

$$\underline{\mu}'X(X'X)^{-1}X'\underline{\mu}$$

$$\underline{\mu} = X\beta$$

$$\frac{\|X(X'X)^{-1}X'\underline{y}\|^2}{\sigma^2} = \frac{\underline{y}'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'\underline{y}}{2\sigma^2} =$$

$$\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{\sigma^2} \sim \chi_p^2 \left(\frac{\beta'X'X\beta}{2\sigma^2} \right)$$

4) $P_V \underline{y}$ e $P_{V^\perp} \underline{y}$ são independentes

$$P_V \underline{y} = X(X'X)^{-1}X'\underline{y} = X\hat{\underline{\beta}} = \hat{\underline{y}}$$

$$P_{V^\perp} = I - P_V$$

$$P_{V^\perp} \underline{y} = (I - P_V) \underline{y} = [I - X(X'X)^{-1}X'] \underline{y}$$

$$= \underline{y} - X\hat{\underline{\beta}} = \underline{y} - \hat{\underline{y}} = \underline{e}$$

-||-||-

$$E(\underline{y}) = \underline{\mu} \in V$$

$$\text{Var}(\underline{y}) = \sigma^2 I \quad \sigma^2 > 0$$

Teorema de Gauss Markov

$\underline{a}' \hat{\underline{\mu}}$ é o melhor estimador linear não viesado de

$$\underline{a}' \underline{\mu} \quad (\hat{\underline{\mu}} = P_V \underline{y})$$

Prova: $\underline{a}' \hat{\underline{\mu}} = \underline{a}' P_V \underline{y}$ é linear em $\underline{y}$

$$E(\underline{a}' \hat{\underline{\mu}}) = E(\underline{a}' P_V \underline{y}) = \underline{a}' P_V E(\underline{y}) =$$

$$= \underline{a}' P_V \underline{\mu} = \underline{a}' \underline{\mu} \text{ pois } \underline{\mu} \in V.$$

$$\text{Var}(\underline{a}' \hat{\underline{\mu}}) = \text{Var}(\underline{a}' P_V \underline{y}) = \underbrace{\underline{a}' P_V P_V' \underline{a}}_{\text{sim idemp}} \sigma^2 = \underline{a}' P_V \underline{a} \sigma^2$$

Seja $\underline{\hat{\mu}} = \underline{b}' \underline{y}$ um outro estimador linear não viesado de $\underline{a}' \underline{\mu}$.

$$E(\underline{b}' \underline{y}) = \underline{a}' \underline{\mu} \Rightarrow \underline{b}' \underline{\mu} = \underline{a}' \underline{\mu}, \forall \underline{\mu} \in V$$

$$\Leftrightarrow \langle \underline{a} - \underline{b}, \underline{\mu} \rangle = 0 \quad \forall \underline{\mu} \in V \quad \Leftrightarrow (\underline{a} - \underline{b})' \underline{\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow (\underline{a} - \underline{b}) \in V^\perp$$

$$\Leftrightarrow P_V(\underline{a} - \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{P_V \underline{a} = P_V \underline{b}}$$

Cálculo de $\text{Var}(\underline{b}' \underline{y})$

a) Teorema 1
p1 $\underline{x} = 0$ $\underline{y} = \underline{b}$

$$\text{Var}(\underline{b}' \underline{y}) = \sigma^2 \underline{b}' \underline{b} = \sigma^2 \|\underline{b}\|^2 =$$

$$\sigma^2 \|\underline{b} - P_V \underline{b}\|^2 + \sigma^2 \|P_V \underline{b}\|^2 = \sigma^2 \|\underline{b} - P_V \underline{b}\|^2 + \sigma^2 \|P_V \underline{a}\|^2$$

$$\geq \sigma^2 \|P_V \underline{a}\|^2 = \sigma^2 \underline{a}' P_V \underline{a} = \text{Var}(\underline{a}' \hat{\underline{\mu}})$$

↓

$$\text{Vale a igualdade} \Leftrightarrow \underline{b} = P_V \underline{b} = P_V \underline{a} \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} \underline{b} = P_V \underline{a} \\ \underline{a}' = \underline{a}' P_V \end{matrix}$$

$$\underline{b}' \underline{y} = \underline{a}' P_V \underline{y} = \underline{a}' \hat{\underline{\mu}}.$$