PARAMETRIZAÇÃO DE CURVAS

02/07/2021

Relembrando o conceito de parametrização, anteriormente estudado.

Eq. cartesiana ou reduzida de uma reta no plano:

$$r : y = mx + n \qquad (1)$$

Eqs. paramétricas de uma reta no plano:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at = f(t) \\ y = y_0 + bt = g(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Diferença entre as eqs:

* Em (1) existe uma relação de dependência entre x e y $\longrightarrow$ quando se conhece uma das variáveis, a outra também é conhecida.
* Em (2), as variáveis x e y são obtidas de forma independente $\longrightarrow$ quando se corre um parâmetro dentro de um intervalo, as coord. (x, y) de cada ponto $\in r$ são obtidas, a partir do parâmetro.
  A introdução desse parâmetro, gerando eqs. paramétricas, quebrou a correlação entre x e y.

Seria possível encontrar equações paramétricas para as cônicas que foram estudadas?
Ou seja: seria possível obter cada coordenada do par (x, y) independentemente, a partir do valor de um dado parâmetro?

SIM //

Com os conhecimentos atuais:

A partir de qualquer eq. (reduzida ou geral) de uma cônica, para encontrar cada par (x, y) de ponto $\in$ cônica $\longrightarrow$ atribuir valor para x e obter y; ou o inverso.

Utilizando PARAMETRIZAÇÃO:

Atribuir valor para um parâmetro t e, a partir desse valor, obter cada par (x, y) de ponto $\in$ cônica, de forma independente.

O que é necessário para que esse processo ocorra?

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

OBTENDO AS EQS. PARAMÉTRICAS DAS CÔNICAS

O parâmetro $t \in \mathbb{R}$, que será introduzido nas eqs. gerais (ou reduzidas) das cônicas, transformando-as em eqs. paramétricas, pode apresentar duas naturezas distintas, cada uma gerando um tipo de parametrização. São elas:

$t \longrightarrow$ escalar

$t \longrightarrow$ ângulo (rad)

Slide 04 - Parábola

① Escalar t

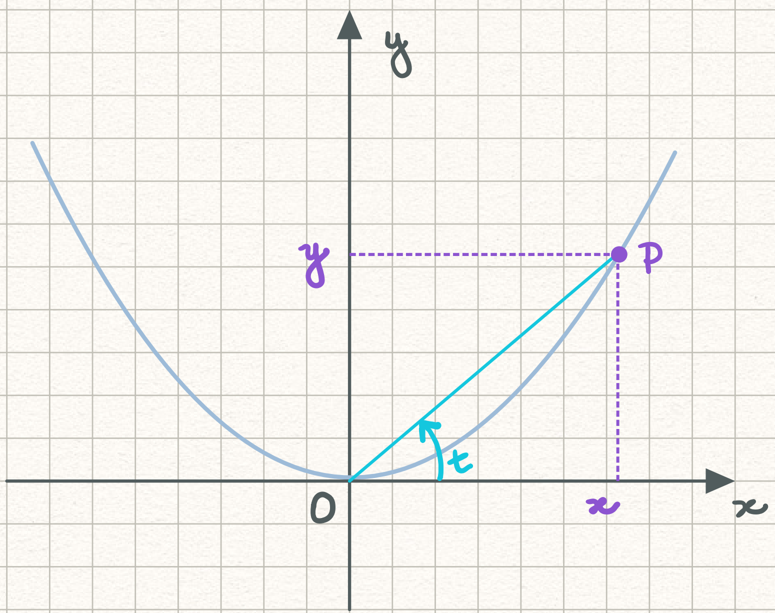
Eq. reduzida da parábola com eixo em Oy:

$$x^2 = 4py$$

$$\big\downarrow \; x = t$$

Eqs. Param. $\begin{cases} x = t & = (f(t)) \\ y = \dfrac{1}{4p}t^2 & = (g(t)) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

② Ângulo t



Tem-se que:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{x}$$

Mas:

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Logo:

$$\operatorname{tg} t = \frac{x^2/4p}{x}$$

$$x = 4p \operatorname{tg} t$$

$$x \longrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$$

$$y = 4p \operatorname{tg}^2 t$$

Portanto:

Eqs. Param. $\begin{cases} x = 4p \operatorname{tg} t & = (f(t)) \\ y = 4p \operatorname{tg}^2 t & = (g(t)) \end{cases}, \quad t \neq \pm \dfrac{\pi}{2}$

Slide 05 - Elipse

1 Escalar t

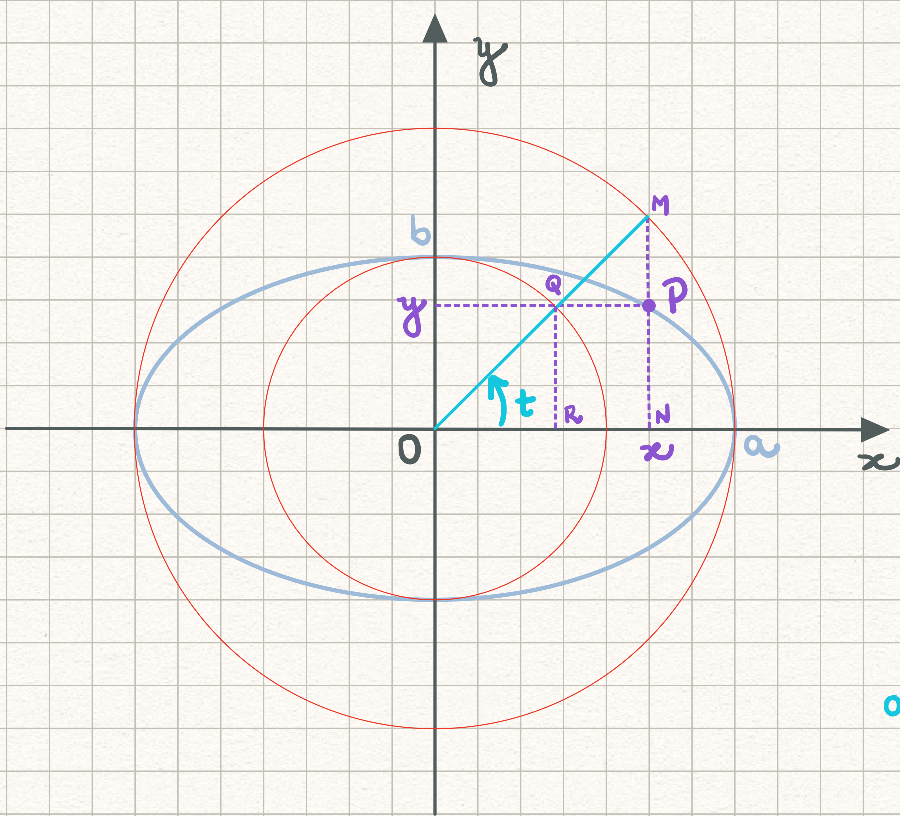
Eq. reduzida da elipse com EM sobre Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

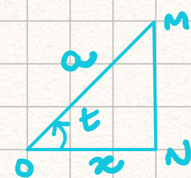
$$\Big\downarrow \; x = t$$

Eqs. Param. $\begin{cases} x = t \\ y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{a^2}} \end{cases}$, $|t| \leq a$

2 Ângulo t



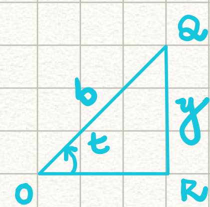
No triângulo OMN:



$$\cos t = \frac{x}{a}$$

$$x = a \cos t$$

No triângulo OQR:



$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{b}$$

$$y = b \operatorname{sen} t$$

Portanto:

Eqs. Param. $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Slide 06 - Circunferência

1 Escalar t

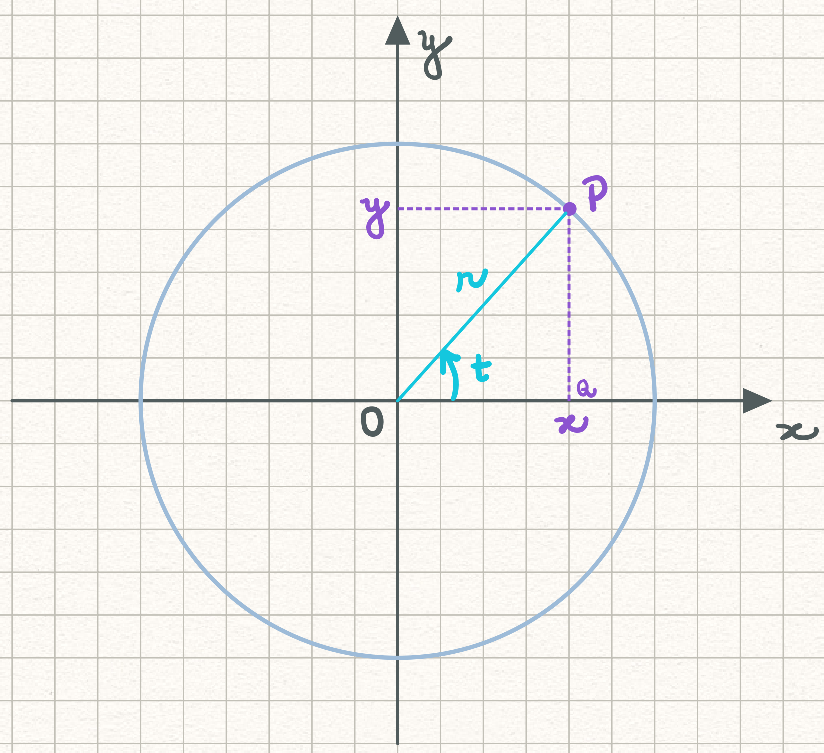
Eq. reduzida da circunferência:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Big\downarrow \; x = t$$

Eq. Param. $\begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}$, $|t| \leq r$

2 Ângulo t



No triângulo OPQ:

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r}$$

$$y = r \operatorname{sen} t$$

$$\cos t = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cos t$$

Portanto:

Eqs. Param. $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Slide 07 - Hipérbole

1 Escalar t

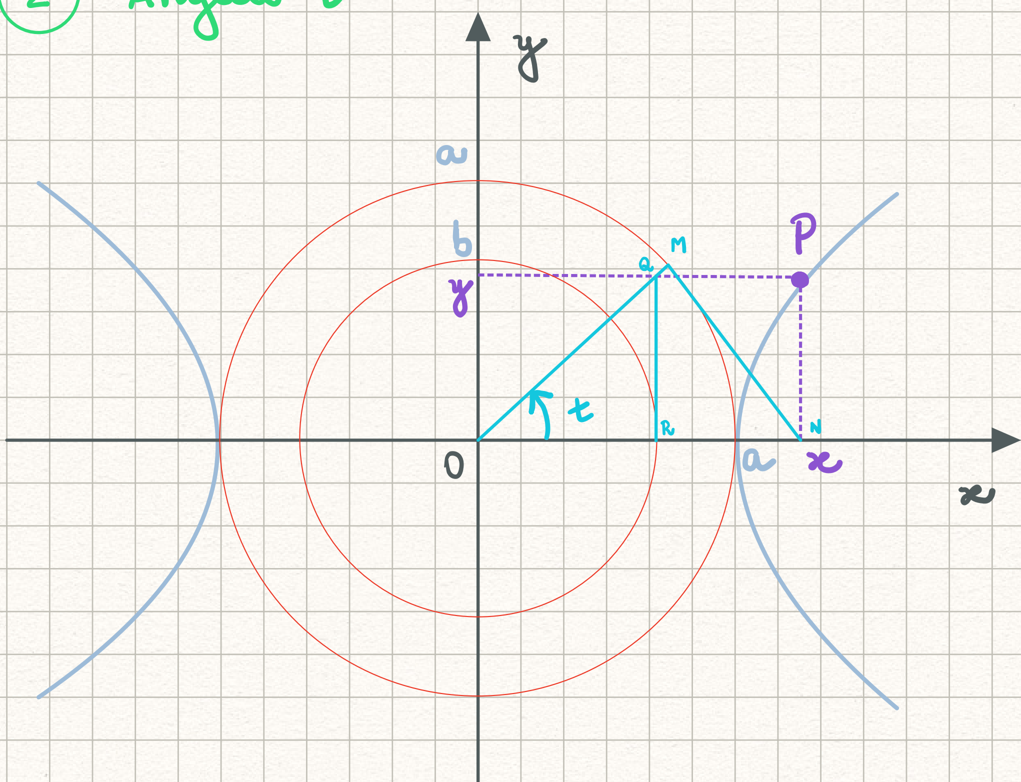
Eq. reduzida da hipérbole com ER sobre Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

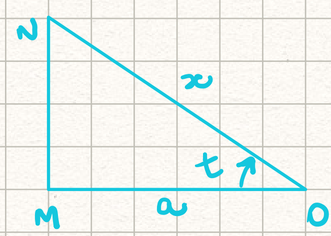
$$\downarrow \; x = t$$

Eqs. Param. $\begin{cases} x = t \\ y = \pm b\sqrt{\dfrac{t^2}{a^2} - 1} \end{cases}$, $|t| \geq a$

2 Ângulo t



No triângulo OMN:



$$\cos t = \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{\cos t} = a \sec t$$

No triângulo OQR:

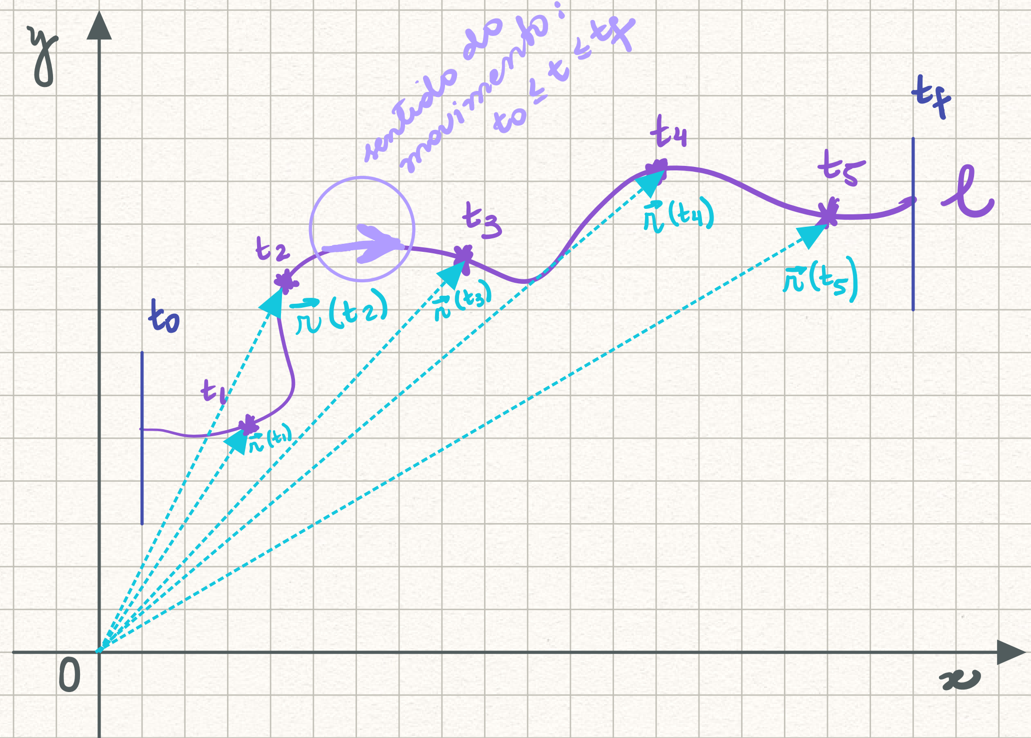
$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{b} \longrightarrow y = b \operatorname{tg} t$$

Portanto:

Eqs. Param. $\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}$, $t \neq \pm \frac{\pi}{2}$

** Significado da parametrização de uma curva plana qualquer $\ell : y = f(x)$.

$\vec{r}(t)$ ... representa o movimento da partícula, em função do parâmetro t, descrito por meio da trajetória definida pela curva ℓ.



$$\ell : y = f(x) \xrightarrow{\text{Param.}} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

$$\longrightarrow \vec{r}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j}$$

- * Limite
- * Derivação
- * Integração

FUNÇÃO VETORIAL

$$* \ |\vec{r}(t)| = \sqrt{[f(t)]^2 + [g(t)]^2}$$

EXERCÍCIOS

(1) $\ell: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \longrightarrow$ Elipse $\begin{cases} \text{EM sobre } Oy \\ a = 3;\ b = 2 \end{cases}$

Parametrizações possíveis $\begin{cases} t: \text{escalar} \\ t: \text{ângulo} \end{cases}$

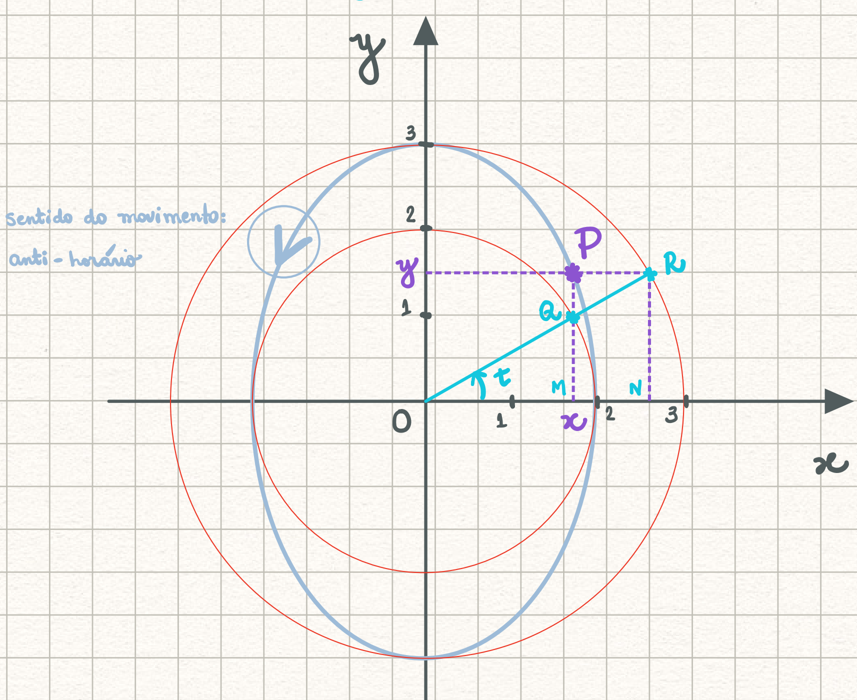
(i) t escalar

$$x = t = f(t)$$

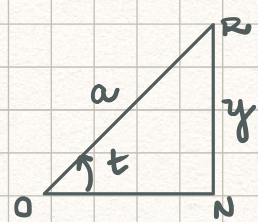
$$y = \pm 3 \sqrt{1 + \frac{t^2}{4}} = \pm g(t)$$

Cada y pode assumir 2 valores, para um mesmo valor do parâmetro. Desta forma, a parametrização adotada não produziu os efeitos esperados, pois associou $\underline{\underline{2}}$ funções à coord. y de cada ponto ∈ elipse.

(ii) t ângulo



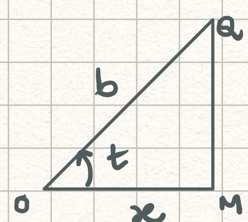
Δ ONR:



$\text{sen}\, t = \dfrac{y}{a}$

$y = a\, \text{sen}\, t$

Δ OMQ:



$\cos t = \dfrac{x}{b}$

$x = b \cos t$

Portanto:

Eqs. Paramétricas da elipse: $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3\, \text{sen}\, t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.