Exercício 8

A taxa de perda de energia por ondas gravitacionais pode ser estimada por

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \sim G(\dddot{q})^2$$

onde q dá a escala do momento de quadrupolo do sistema: $\dddot{q} \sim \frac{MD^2}{T^3}$. Logo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \sim \frac{GM^2D^4}{T^6} = \frac{GM^2}{D}\frac{D^5}{T^6} \sim |\mathcal{E}|\frac{D^5}{T^6} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}/dt}{|\mathcal{E}|} \sim \frac{D^5}{T^6} \Rightarrow \left.\frac{\delta\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|}\right|_{ciclo} \sim \left(\frac{D}{T}\right)^5 = \left(\frac{D}{cT}\right)^5$$

Como no sistema Terra - Lua temos $D/c \sim 1/s$ e $T \sim 28\,\text{dias} \sim 10^6 s$, temos

$$\left.\frac{\delta\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|}\right|_{ciclo} \sim 10^{-30}.$$

Por outro lado, temos $\mathcal{E}_T \sim -\frac{GM^2}{D} \Rightarrow \delta\mathcal{E}_T \sim +\frac{GM^2}{D^2}\delta D \sim |\mathcal{E}_T|\frac{\delta D}{D}$.

Portanto, se energia é dissipada, de modo que $\delta\mathcal{E}_T < 0$, temos que $\delta D < 0$; ou seja D diminui:

$$\left.\frac{\delta D}{D}\right|_{ciclo} \sim -\left.\frac{\delta\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|}\right|_{ciclo} \sim -10^{-30} \Rightarrow \left.\frac{\delta D}{D}\right|_{10^{10}\,anos} \sim -10^{-30}\,\frac{1}{\cancel{ciclo}} \times 10^{10}\,\cancel{anos} \times 10\,\frac{\cancel{ciclos}}{\cancel{ano}} = -10^{-19} \Rightarrow \boxed{\delta D \sim -10^{-10}\,m}$$

$$D \sim 5 \times 10^8\,m$$

(± 3 ordens de grandeza devido a fatores $(2\pi)^n$)

A amplitude da onda a 1 unidade astronômica (~ 8 minutos-luz) é estimada por:

$$A \sim \frac{G}{d}\ddot{q} \sim \frac{GMD^2}{dT^2} \sim \frac{GM}{D^2}\frac{D^4}{dT^2} \overset{\text{Lei de Kepler}}{\sim} \frac{D}{T^2}\frac{D^4}{dT^2} = \frac{D^5}{dT^4} = \frac{(D/c)^5}{(d/c)\,T^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \sim \frac{(1s)^5}{(60\times 8)s\,(2\times 10^6)^4 s^4} \sim 10^{-28}$$

(± 3 ordens de grandeza devido a fatores $(2\pi)^n$ ignorados)

(Note que A é adimensional.)