UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

13. Parametrização de Curvas

LOB 1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

13.1 INTRODUÇÃO

- Equação cartesiana de uma reta no plano:

$$y = mx + n \;\therefore\; y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

- Equações paramétricas de uma reta no plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \end{cases} \therefore \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

- Diferença entre as equações (1) e (2)?
  - Em **(1)**, existe uma relação de dependência entre as coordenadas x e y.
  - Em **(2)**, as coordenadas x e y são obtidas independente uma da outra → à medida que se corre um parâmetro (t) em um intervalo I $(t \in I)$, as coordenadas (x, y) dos pontos que pertencem à reta são obtidas.

13.2 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS CÔNICAS

- Seria possível encontrar equações paramétricas para as cônicas anteriormente estudadas? Isto é, seria possível obter as coordenadas de cada par (x, y) *independentemente*, a partir do valor atribuído um dado parâmetro?

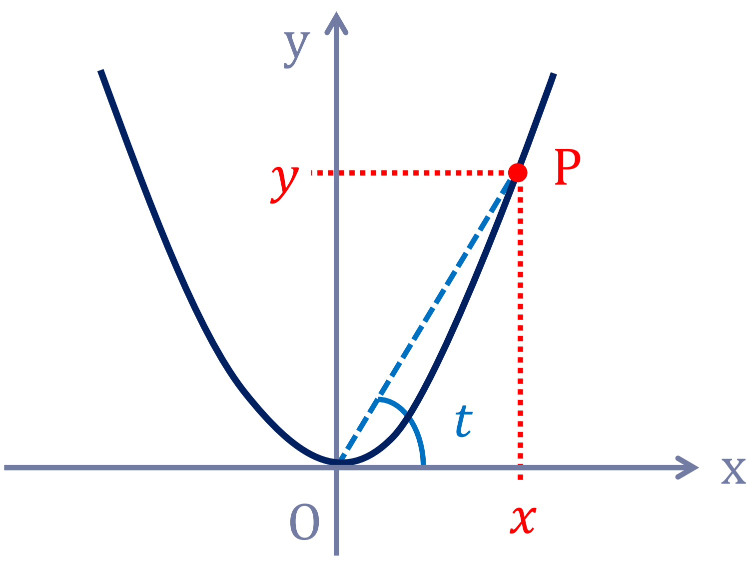
- Nas aulas anteriores foram vistas eqs. cartesianas gerais e reduzidas das cônicas. Abaixo, exemplos das eqs. reduzidas:

Cônica	**Equação**
Parábola (eixo de simetria sobre Oy)	$x^2 = 4py$
Elipse (eixo maior sobre Ox)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Circunferência (centro em O)	$x^2 + y^2 = r^2$
Hipérbole (eixo real sobre Ox)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

13.2.1 Equações Paramétricas da Parábola

1) $x, y \rightarrow$ escalar t: $x^2 = 4py \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{4p}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $x, y \rightarrow$ ângulo t:



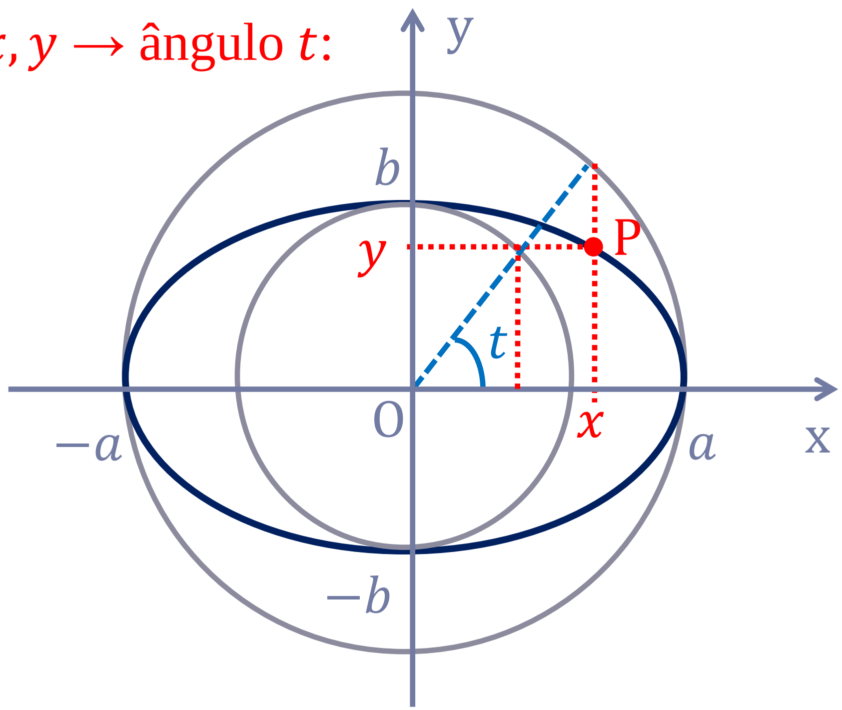
- $tgt = \frac{y}{x} \rightarrow \begin{cases} x = 4p\text{tg}t \\ y = 4p\text{tg}^2 t \end{cases}, t \neq \pm\frac{\pi}{2}$

- Equações Paramétricas da Parábola.

13.2.2 Equações Paramétricas da Elipse

1) $x, y \rightarrow$ escalar t: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \pm\, b\sqrt{\left(1 - \dfrac{t^2}{a^2}\right)} \end{cases}, |t| \leq a$

2) $x, y \rightarrow$ ângulo t:

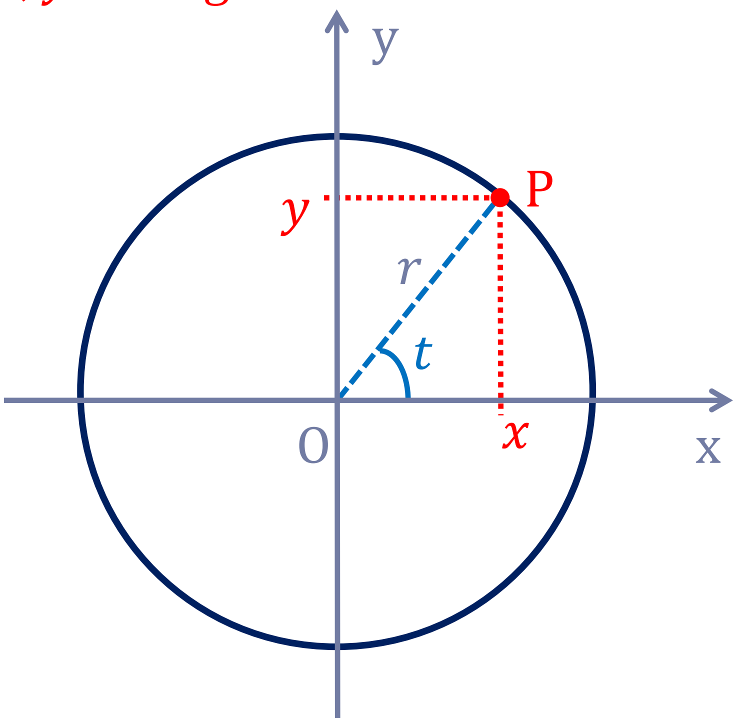


- $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$
- Equações Paramétricas da Elipse.

13.2.3 Equações Paramétricas da Circunferência

1) $x, y \longrightarrow$ escalar t: $x^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}, |t| \leq r$

2) $x, y \longrightarrow$ ângulo t:

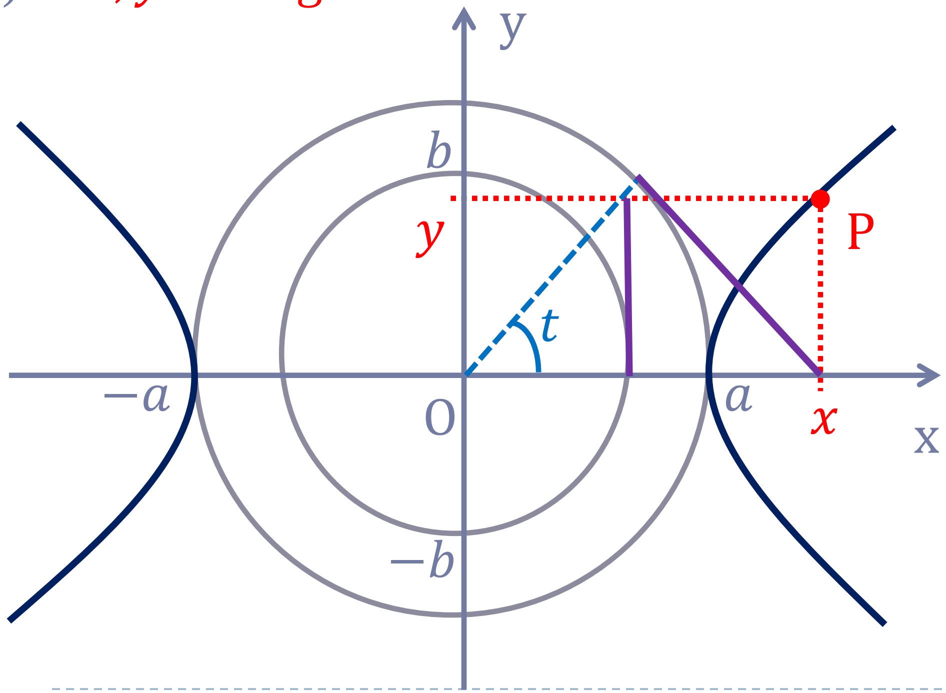


- $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\text{sen}\, t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$
- Equações Paramétricas da Circunferência.

13.2.4 Equações Paramétricas da Hipérbole

1) $x, y \rightarrow$ escalar t: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \pm b\sqrt{\left(\frac{t^2}{a^2} - 1\right)} \end{cases}, |t| \geq a$

2) $x, y \rightarrow$ ângulo t:



- $\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \quad t \neq \pm\frac{\pi}{2}$
- Equações Paramétricas da Hipérbole.

Note que: $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ ou $(\cos t)^2 + (\text{sen}\, t)^2 = 1$ **(a)**

- $\cos t = \frac{x}{a}$ e $\text{sen}\, t = \frac{y}{b}$ ➔ **(a)** ➔ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ➔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ➔ ***Elipse***

- $\cos t = \frac{x}{r}$ e $\text{sen}\, t = \frac{y}{r}$ ➔ **(a)** ➔ $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$ ➔ $x^2 + y^2 = r^2$ ➔ ***Circunferência***

- Dividindo **(a)** por $(\cos t)^2$: $1 + \left(\frac{\text{sen}\, t}{\cos t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$ ➔ $1 + (\text{tg}\, t)^2 = (\sec t)^2$

$\xrightarrow{\text{tg}\, t = \frac{y}{b};\, \sec t = \frac{x}{a}} 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2$ ➔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ➔ ***Hipérbole***

Observações

a) Há quatro eqs. paramétricas possíveis para a parábola:

$$\begin{cases} x = 4p\mathrm{tg}t \\ y = 4p\mathrm{tg}^2 t \end{cases}$$

Eixo sobre Oy

Concavidade (+)

$$\begin{cases} x = 4p\mathrm{tg}t \\ y = -4p\mathrm{tg}^2 t \end{cases}$$

Eixo sobre Oy

Concavidade (-)

$$\begin{cases} x = 4p\mathrm{tg}^2 t \\ y = 4p\mathrm{tg}t \end{cases}$$

Eixo sobre Ox

Concavidade (+)

$$\begin{cases} x = -4p\mathrm{tg}^2 t \\ y = 4p\mathrm{tg}t \end{cases}$$

Eixo sobre Ox

Concavidade (-)

b) Há duas eqs. paramétricas possíveis para a elipse:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$ Eixo maior sobre Ox

$$\begin{cases} x = b\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$ Eixo maior sobre Oy

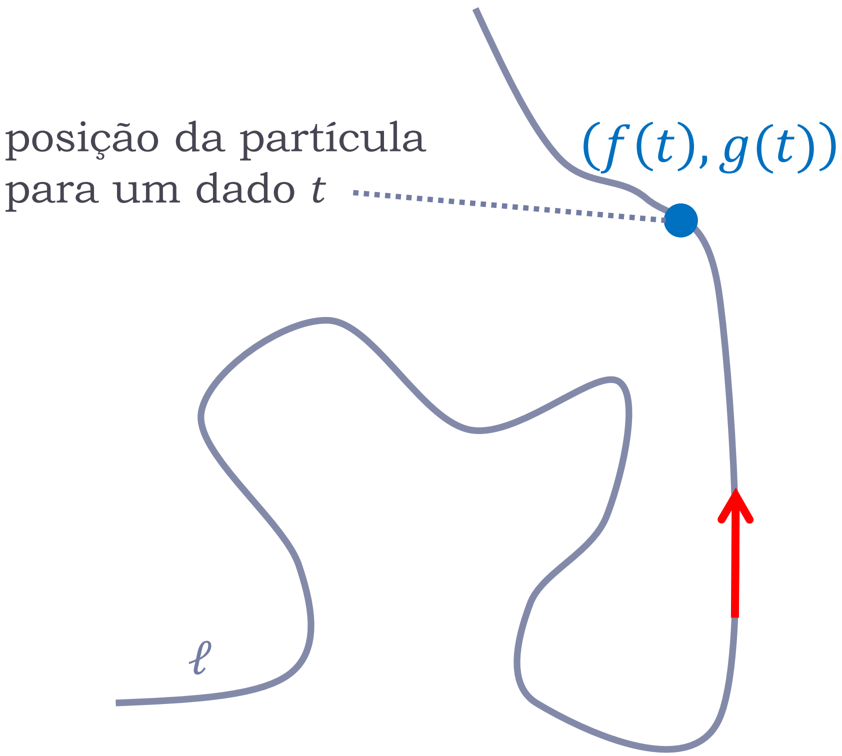
c) Há duas eqs. paramétricas possíveis para a hipérbole:

$$\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}$$ Eixo real sobre Ox

$$\begin{cases} x = b\,\mathrm{tg}\,t \\ y = a\sec t \end{cases}$$ Eixo real sobre Oy

- ***Parametrização*** → em vez de pensar em uma curva plana ℓ como um gráfico de uma função ou equação, considera-se uma forma mais geral de pensar → *uma curva é considerada a trajetória de uma partícula em movimento, cuja posição está mudando em função do parâmetro t* → cada uma das coordenadas x e y da posição da partícula se torna uma função da terceira variável t.

$$\ell\colon y = f(x) \xrightarrow{\textbf{PARAMETRIZAÇÃO}} \ell\colon \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$



A ***curva ou trajetória*** ℓ de uma partícula se movendo no plano Oxy não é sempre o gráfico de uma única função ou equação.

- A trajetória da figura anterior falha no teste da reta vertical $\longrightarrow$ não pode ser descrita como o gráfico de uma função na variável x.
- No entanto, é possível descrever a trajetória por meio de um par de equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, em que $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções contínuas.
  - Tais equações descrevem curvas planas mais gerais que aquelas como $y = f(x)$ e também a localização da partícula $(x, y) = (f(t), g(t)), \forall\, t \in I$.
- Variável $t \longrightarrow$ parâmetro para a curva; seu domínio $I \longrightarrow$ intervalo do parâmetro.
  - Se I é um intervalo fechado $a \leq t \leq b \therefore (f(a), g(a)) \longrightarrow$ ponto inicial da curva; $(f(b), g(b)) \longrightarrow$ ponto final da curva.
- Se equações paramétricas e um intervalo são fornecidos para uma curva plana $\longrightarrow$ parametrização da curva.

EXERCÍCIOS

1. Forneça equações paramétricas para ℓ: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, indicando os valores para o parâmetro t. Esboce suas equações paramétricas.

2. Dê equações paramétricas para a curva ℓ: $y^2 - 8x - 8y + 8 = 0$, indicando os valores para o parâmetro t. Esboce suas parametrizações.

3. Esboce o gráfico da equação paramétrica dada por $(x, y) = (3t - 1, 4t + 2)$.

4. A hipérbole ℓ tem focos F_1, F_2 e vértices A_1, A_2 . Encontre equações paramétricas de ℓ se:

   a) $F_1 = (2,0), F_2 = (8,0), A_1 = (3,0), A_2 = (7,0)$;

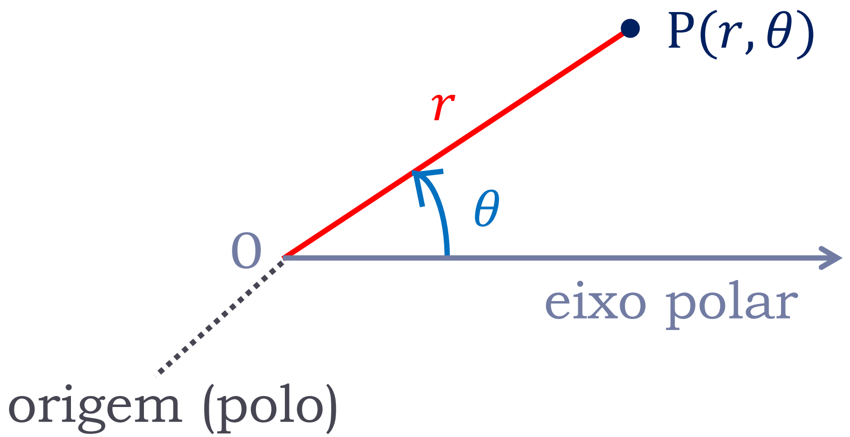
   b) $F_1 = (0,0), F_2 = (4,8), A_1 = (1,2), A_2 = (3,6)$.

5. A elipse ℓ tem focos $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (2,4)$ e vértices $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (3,6)$. Determine as equações paramétricas de ℓ.

13.4 COORDENADAS POLARES

DEFINIÇÃO:

- Para definir coordenadas polares: primeiro são fixados uma origem O (*polo*) e um *eixo polar* a partir de O. Então, cada ponto P pode ser localizado associando a ele um *par de coordenadas polares* (r, θ), no qual $r = \pm\,\delta(\mathrm{O}, \mathrm{P})$ fornece a distância orientada de O a P e θ, o ângulo orientado a partir do eixo polar até o raio OP:



$$\mathbf{P}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$$

Observações

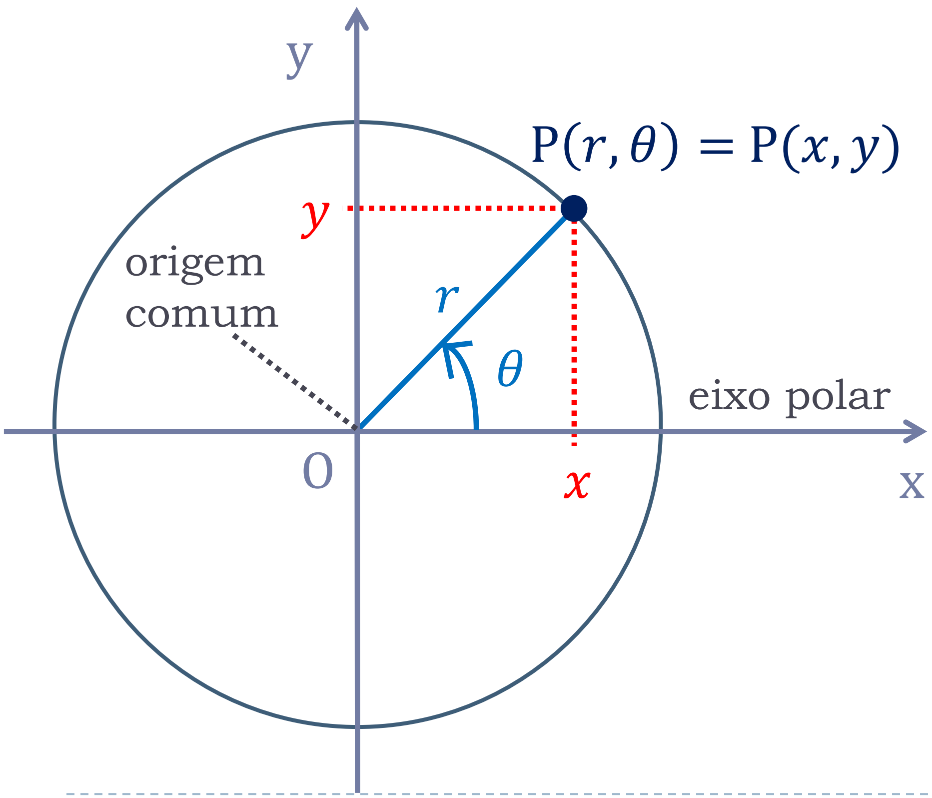
a) Assim como na trigonometria: ***θ* positivo** → medido em *sentido anti-horário*; ***θ* negativo** → medido em *sentido horário*.

b) Embora um ponto no plano possua um só par de coordenadas cartesianas, ele possui *infinitos pares* de coordenadas polares:

i. O ponto a 2 unidades da origem ao longo do raio $\theta = \frac{\pi}{6}$ tem coordenadas polares $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$ e também: $r = 2$ e $\theta = \frac{13\pi}{6}$; $r = 2$ e $\theta = -\frac{11\pi}{6}$; $r = -2$ e $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

ii. O ponto P$\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ pode ser alcançado girando $\frac{7\pi}{6}$ em ***sentido anti-horário***, a partir do eixo polar, e ***avançando*** 2 unidades ou girando $\frac{\pi}{6}$ em ***sentido anti-horário***, a partir do eixo polar, e ***voltando*** 2 unidades (suas coordenadas polares seriam $r = -2$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$).

- Quando coordenadas polares e cartesianas são utilizadas em um plano, as duas origens são posicionadas juntas e o eixo polar coincide com o eixo Ox positivo. Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados pelas equações a seguir:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\theta \end{cases}$$

- Para cada $(x, y) \neq (0,0)$, existe um único $\theta \in [0,2\pi)$ que satisfaz as eqs. acima, fornecendo uma representação em coord. polares (r, θ) das coord. cartesianas (x, y) de um ponto P.

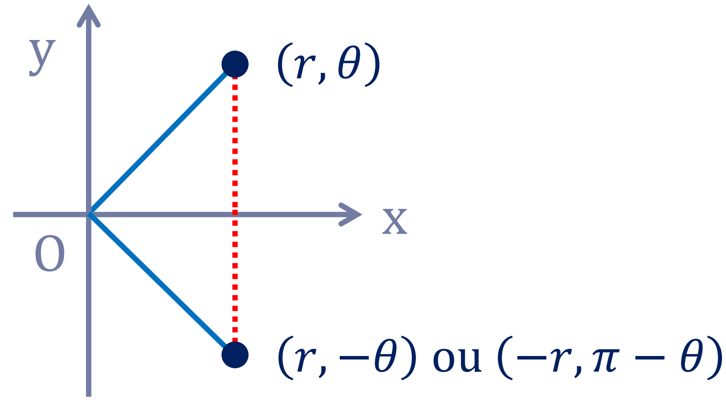
Equação Polar

- Equação polar é uma equação do tipo $r = f(\theta)$ ou $\theta = f(r)$.
  - O gráfico de uma equação polar é o lugar geométrico de todos os pontos no plano $r\theta$ que satisfazem esta equação.

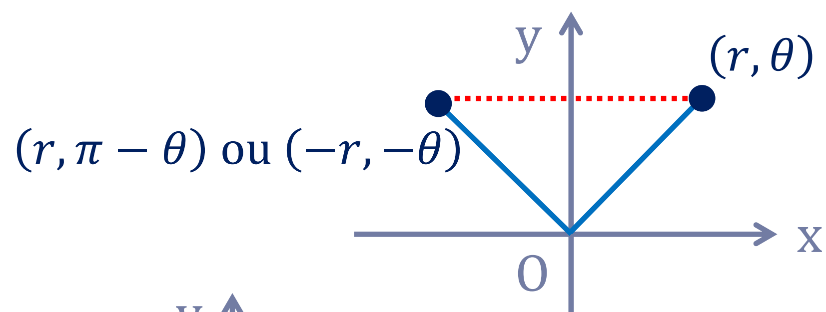
Eq. Cartesiana	Eq. Polar Equivalente
$x^2 + y^2 = 4$	$r = 2$
$y = x$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
$x^2 - y^2 = 9$	$r^2 = 9\sec 2\theta$
$-3x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$	$r = 1 + 2r\cos\theta$
$xy = 4$	$r^2 = 8\mathrm{cossec}\,2\theta$
$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$	$r = 1 - \cos\theta$

Simetria em Coordenadas Polares

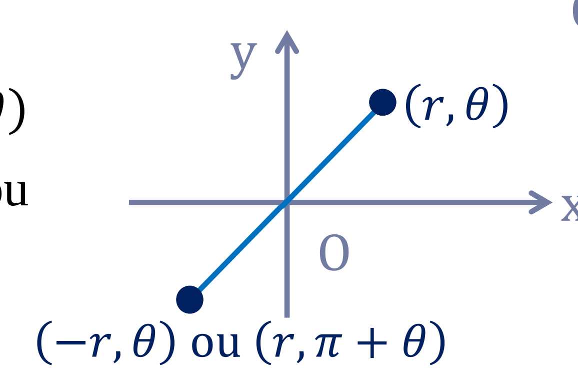
1) *Simetria em relação ao eixo Ox*: se $P(r, \theta)$ pertence ao gráfico, então $P(r, -\theta)$ ou $P(-r, \pi - \theta)$ também pertencerá.



2) *Simetria em relação ao eixo Oy*: se $P(r, \theta)$ pertence ao gráfico, então $P(r, \pi - \theta)$ ou $P(-r, -\theta)$ também pertencerá.



3) *Simetria em relação à origem*: se $P(r, \theta)$ pertence ao gráfico, então $P(-r, \theta)$ ou $P(r, \pi + \theta)$ também pertencerá.



EXEMPLO:

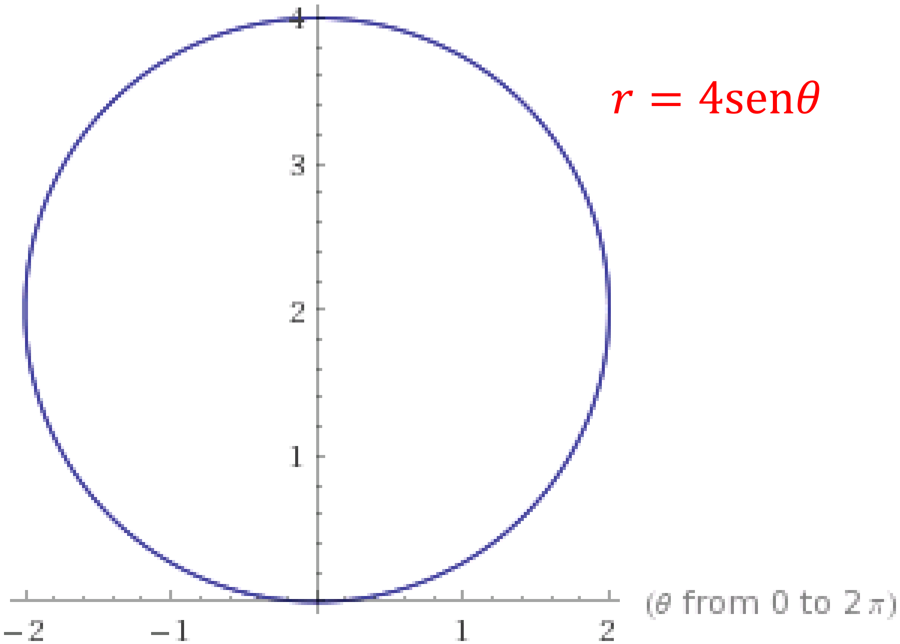
Seja a curva plana abaixo. Identifique a simetria, caso exista; represente-a no plano polar $r\theta$; e encontre sua respectiva equação cartesiana:

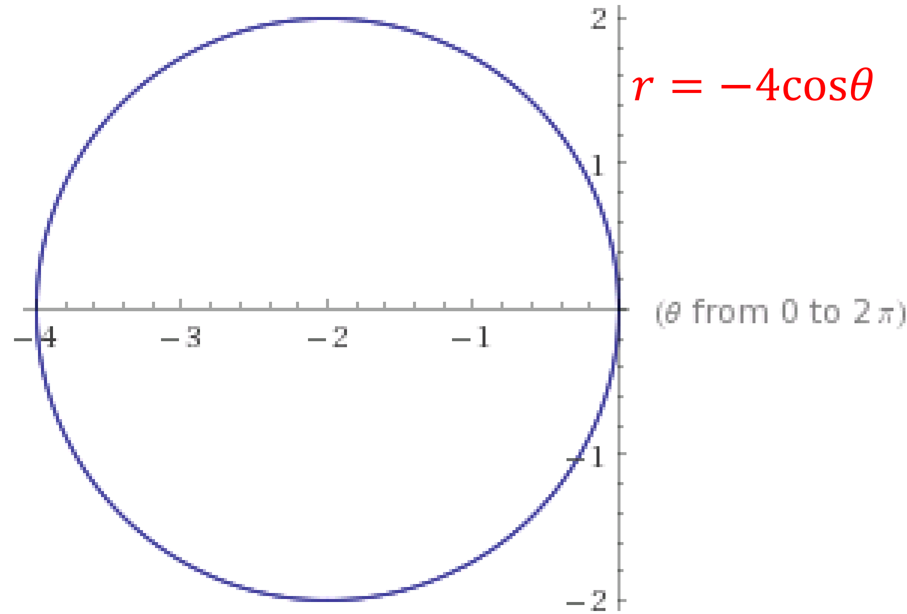
$$r = 1 - \cos\theta$$

Observação

Equações clássicas em coordenadas polares e suas respectivas representações geométricas:

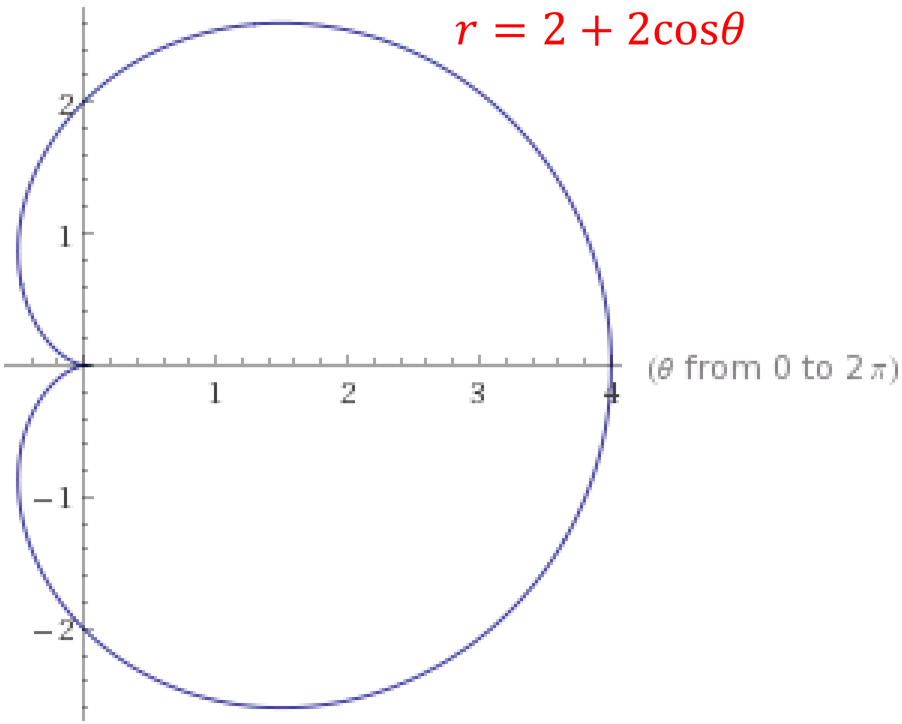
1) Circunferência $\begin{cases} r = a\text{sen}\theta \\ r = a\cos\theta \end{cases}, a \neq 0$



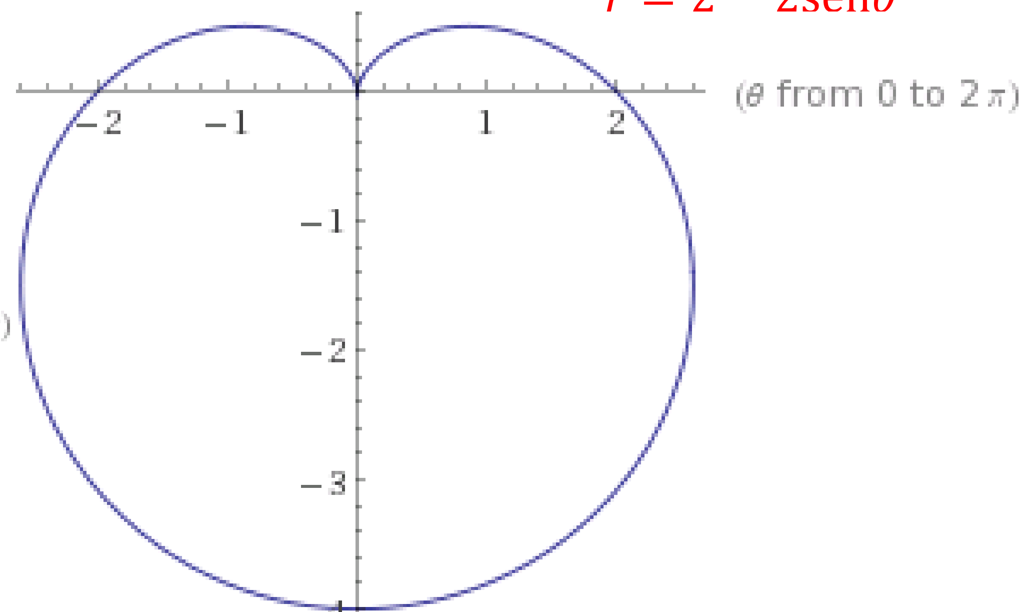


2) Cardioide $\begin{cases} r = a \pm a\cos\theta \\ r = a \pm a\operatorname{sen}\theta \end{cases}, a \neq 0$

$r = 2 + 2\cos\theta$

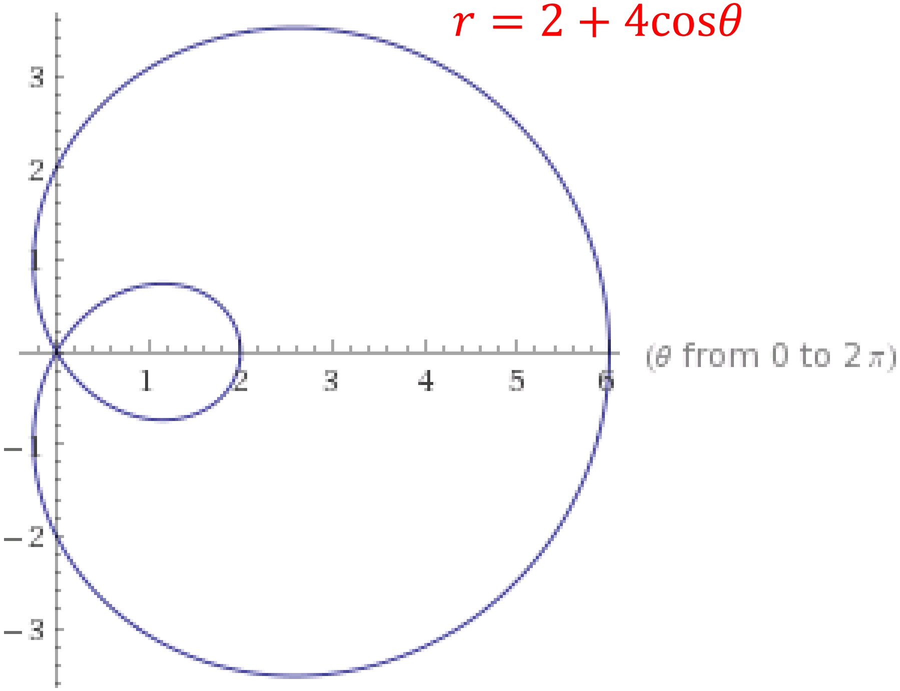


$r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$

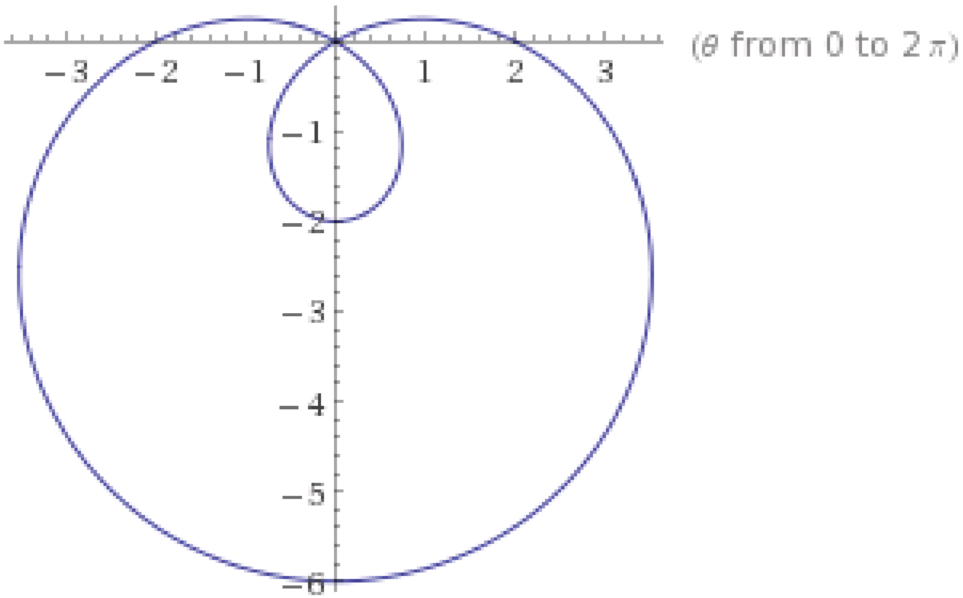


3) Caracol (Espiral de Pascal) $\begin{cases} r = a \pm b\cos\theta \\ r = a \pm b\text{sen}\theta \end{cases}, a \neq b\ ;\ a, b \neq 0$

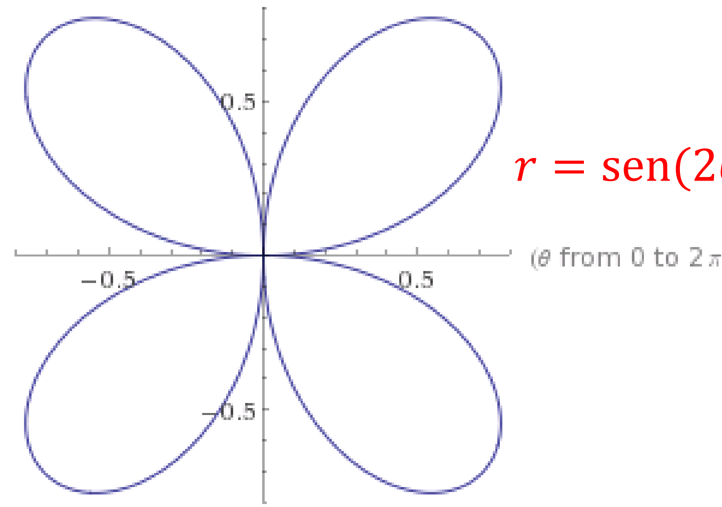
$r = 2 + 4\cos\theta$



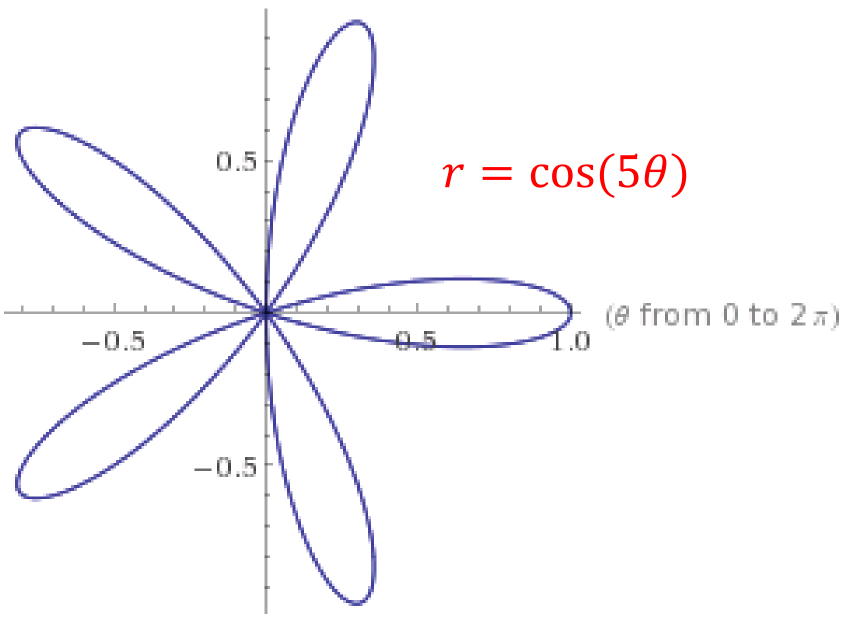
$r = 2 - 4\text{sen}\theta$



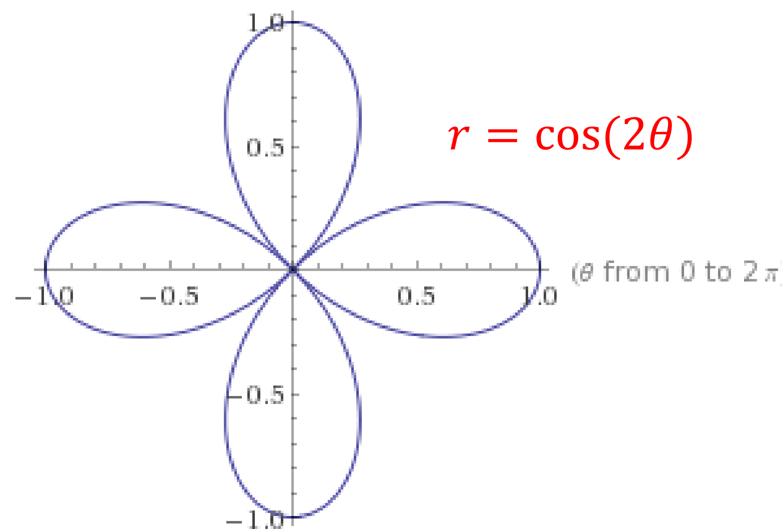
4) Rosácea $\begin{cases} r = a\text{sen}(n\theta) \\ r = a\cos(n\theta) \end{cases}, a \neq 0, n \in \mathrm{I}^*$



$r = \text{sen}(2\theta)$

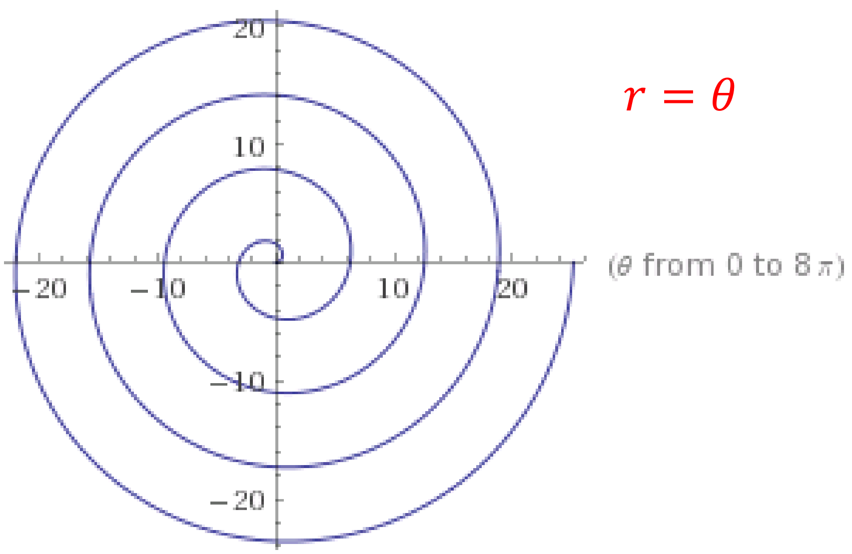


$r = \cos(5\theta)$

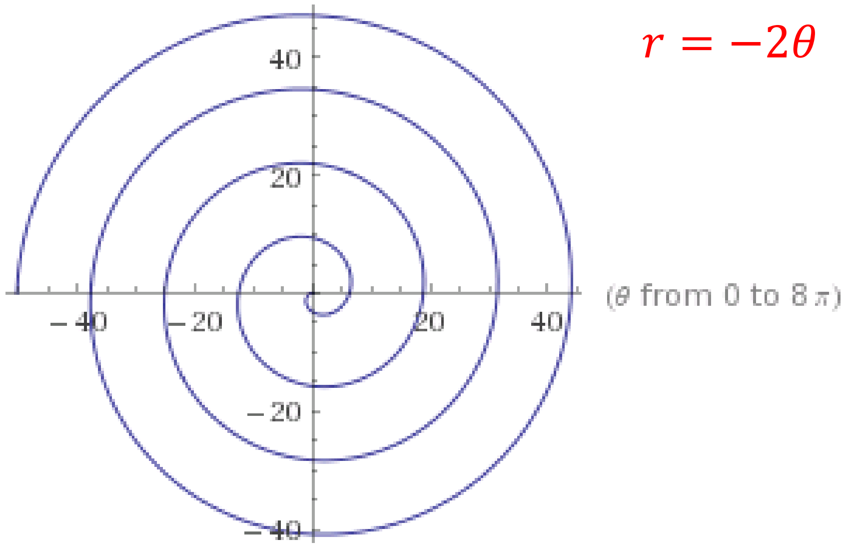


$r = \cos(2\theta)$

5) Espiral de Arquimedes: $r = a\theta, a \neq 0$



$r = \theta$



$r = -2\theta$

EXERCÍCIOS

1. Represente graficamente no plano $r\theta$ os pontos cujas coordenadas polares são: $P_1\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$; $P_2\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$; $P_3\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$; $P_4\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$ e $P_5\left(-3,\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Determine as coordenadas polares de um ponto cujas coordenadas cartesianas são $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Determine as coordenadas cartesianas de um ponto cujas coordenadas polares são $r=3$ e $\theta=\frac{\pi}{6}$.

4. Represente graficamente no plano polar $r\theta$ as equações polares a seguir. Encontre suas respectivas equações cartesianas:

   a) $r=4\text{sen}\theta$ (circunferência) $x^2+(y-2)^2=4$

   b) $r=2+4\cos\theta$ (caracol) $x^4+y^4+2x^2y^2-8xy^2-8x^3+12x^2-4y^2=0$

   c) $r=\text{sen}2\theta$ (rosácea) $x^6+y^6+3x^4y^2+3x^2y^4-4x^2y^2=0$

- A partir de qualquer destas equações, para encontrar um ponto que pertence à cônica, é necessário atribuir um valor para x e determinar y ou vice-versa.

- ***Objetivo*:** a partir da atribuição de um mesmo valor (parâmetro), **encontrar** as respectivas coordenadas ***x* e *y* *independentemente*** ➔ determinar as equações paramétricas das cônicas ➔ escrever a equação de uma cônica no formato:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

em que t é um parâmetro, $t \in I$.