

## 7a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

### Topologia da reta

1º. semestre de 2021

1. Sejam  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Mostre que  $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  e  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\cup} B)$ . Dê um exemplo aonde a desigualdade do segundo é estrita.
2. Seja  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $F$  um fechado tal que  $X \subseteq F$ . Mostre que  $\overline{X} \subseteq F$ .
3. Mostre que toda coleção de abertos dois a dois disjuntos é enumerável.  
(*Dica: Use os Racionais* )
4. Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  a função  $f(x) = x^2$ . Mostre que dado  $U \subseteq \mathbb{R}$  aberto, temos que  $f^{-1}[U]$  é aberto. Vale que  $f[A]$  é aberto para todo  $A$  aberto?
5. Faça os detalhes do Teorema de Borel-Lebesgue. ( $A \subset \mathbb{R}$  é compacto  $\Leftrightarrow A$  é fechado e limitado.)
6. Seja  $C \subseteq \mathbb{R}$  um compacto e  $U \subseteq \mathbb{R}$  um aberto tal que  $C \subseteq U$ . Mostre que existe um  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $x \in C$  e para todo  $y \in \mathbb{R}$ , se  $|y - x| < \epsilon$ , então  $y \in U$ .
7. Considere  $C$  um compacto em  $\mathbb{R}$ 
  - (a) Sejam  $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$  uma família de fechados tais que  $F_i \subset F_{i+1}$ ,  $F_i \subseteq C$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Mostre que se para todo  $I' \subseteq \mathbb{N}$  finito temos  $\bigcap_{i \in I'} F_i \neq \emptyset$ . Mostre que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$ .
  - (b) De exemplos aonde o Principio dos Intervalos Encaixados falha se os conjuntos não forem fechados ou não forem limitados.

## 8. Conjunto de Cantor

**Definição:** A construção do conjunto de Cantor é feita por recursão. Começamos tomando  $I_0 = [0, 1]$ . Considere agora  $J_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Definimos  $I_1 = I_0 \setminus J_0$ , ou seja, dividimos o intervalo em 3 partes iguais e removemos a do meio. Obtemos assim dois intervalos. Repetimos agora o processo, dividindo cada um em três e retirando o do meio. O conjunto de Cantor é o limite dessa construção.

- Complete a construção acima.
- Argumente que o conjunto de Cantor é um fechado infinito.
- (*Curiosidade*) Qual é a soma total do diâmetro dos intervalos removidos ?
- Se  $F$  é um conjunto fechado infinito enumerável, então ele possui infinitos pontos isolados.
- Mostre que todo elemento do conjunto de Cantor é ponto de acumulação
- Conclua que o conjunto de Cantor é não enumerável