7a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Mostre que, se f é contínua em L e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L)$.

2. Determine o conjunto dos pontos nos quais as funções abaixo são contínuas (justificando).

   (a) $f(x) = x^2 + 1$,

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$,

   (d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x \geq 2, \\ 1 \text{ se } x < 2 \end{cases}$,

   (e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

3. Dadas as funções $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos:
   $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in D.$
   $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in D.$

   Prove que f e g são contínuas em $x_0 \in D$ então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ também o são.

4. Prove que existe um número x tal que sen $x = x + 1$.

5. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que

   (a) Se $f(r) = 0, \forall r \in I \cap \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

   (b) Se $f(r) = g(r), \forall r \in I \cap \mathbb{Q}$, então $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Mostre que:

(a) $f(0) = 0$,

(b) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$,

(c) Se f é contínua em 0, então f é contínua em $\mathbb{R}$,

(d) Se $f(1) = a$ então $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$,

(e) Se $f(1) = a$ e f é contínua em 1 então $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ se } x = \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível} \\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$,

   Prove que f é contínua em $x \in]0,1[$ se e somente se x é irracional.

8. Para cada função abaixo decidir se são limitadas superiormente ou inferiormente no intervalo I indicado e quais assumem os valores máximo e mínimo.

   (a) $f(x) = 2x^2 - x + 3, \quad I =]-1,1[$ (b) $f(x) = x^3 - x - 1, \quad I =]-1,1[$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x+1}, I =]-1,\infty[$ (d) $f(x) = -5x^2 - 3x, \quad I =]0,\infty[$

9. Para cada uma das funções abaixo encontrar um número natural n para o qual $f(x) = 0$ para algum $x \in [n, n+1]$.

   (a) $f(x) = x^5 + 5x + 2x + 1$

   (b) $f(x) = x^5 + x + 1$

   (c) $f(x) = x^3 - x + 3$

10. Suponha que f é uma função contínua em $[-1,1]$ e que $x^2 + (f(x))^2 = 1$ para todo x. Mostrar que ou $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, para todo x ou $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, para todo x.

11. Suponha que f é uma função contínua em $[0,1]$ e que $f(x) \in [0,1]$, para todo x. Mostre que $f(x) = x$, para algum x.

12. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove se, se A éconjunto aberto, então o conjunto $B := \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e, se A é fechado, o conjunto $C := \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

13. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **semicontínua superiormente (scs)** no ponto $a \in A$ se, para cada $c > f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ implicam $f(x) < c$. Defina função **semicontínua inferiormente (sci)** no ponto $a \in A$ analogamente. Mostre que f é contínua no ponto $a \in A$ se e somente se f é scs e sci neste ponto. Prove se f é scs e g é sci no ponto a e $f(a) < g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ então $f(x) < g(x)$.

14. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se, para todo $A \subset \mathbb{R}$ tem-se $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ ($x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \cap [x - \epsilon, x + \epsilon[$).

15. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente constante* se for constante em uma vizinhança de cada ponto de A interceptada com A. Mostre que, se $A = I$ é um intervalo e f é localmente constante, então f é constante.

16. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função monótona, definida no intervalo I. Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, mostre que f é contínua.

17. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função contínua, tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Prove que f tem um ponto de mínimo.

18. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assume cada um de seus valores $f(x), x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

19. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função contínua, tal que existem $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Prove que f é uniformemente contínua.

20. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $f + g$ é uniformemente contínua e que o produto também o é, se f e g forem limitadas.

21. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica se existe um $p > 0$ tal que $f(x) = f(x + p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que toda função periódica é limitada e uniformemente continua.

22. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $f : A \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Dê um contra-exemplo, quando f é contínua, mas não uniformemente contínua. Use isto para mostrar que f é uniformemente contínua em (a, b) se e somente se ela pode ser estendida para uma função contínua definida em $[a, b]$.