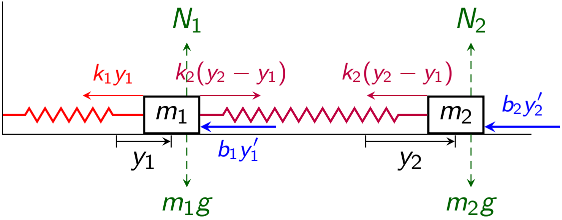
SME 341 / SLC 609
Assunto: Equações Diferenciais
Aula EDO-5 – Sistemas de EDOs lineares homogêneas

Prof. Miguel Frasson

Julho de 2021

2ª Lei de Newton, molas acopladas



- Resultante na massa m_1: $R_1 = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) - b_1 y_1'$
- Resultante na massa m_2: $R_2 = -k_2(y_2 - y_1) - b_2 y_2'$
- 2ª Lei de Newton:

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = R_1 \\ m_2 y_2'' = R_2 \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 y_1'' = -(k_1 + k2) y_1 + k_2 y_2 - b_1 y_1' \\ m_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 - b_2 y_2' \end{cases}$$

Toda EDO (ou sistema) pode ser escrita como 1ª ordem

- Coloque uma nova variável para cada $y^{(n)}$ para $n = 0$ até o antecessor da ordem da EDO.

Exemplo: $my'' + by' + ky = 0$

- $x_1 = y$, $x_2 = y'$
- Derivando:

$$
\begin{aligned}
x_1' = y' = x_2 &\implies x_1' = x_2 \\
x_2' = y'' &\implies m\underbrace{y''}_{x_2'} + b\underbrace{y'}_{x_2} + k\underbrace{y}_{x_1} = 0 \\
&\implies mx_2' + bx_2 + kx_1 = 0
\end{aligned}
$$

- Eis o sistema de 1ª ordem

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2 \\
x_2' = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1
\end{cases}
$$

Toda EDO (ou sistema) pode ser escrita como 1ª ordem

Exemplo: massa-mola acoplado

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = -(k_1 + k2)y_1 + k_2 y_2 - b_1 y_1' \\ m_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 - b_2 y_2' \end{cases}$$

- $x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_1' \ (= x_1'), \qquad x_3 = y_2, \qquad x_4 = y_2' \ (= x_3')$
- $x_1' = y_1' = x_2, \qquad x_2' = y_1''\ , \qquad x_3' = y_2' = x_4, \qquad x_4' = y_2''$
- Eis o sistema de 1ª ordem

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{k_1+k2}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1} x_2 + \frac{k_2}{m_1} x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{b_2}{m_2} x_4 \end{cases}$$

Forma matricial dos sistemas lineares de 1ª ordem

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + f(t) \\ x_2' = cx_1 + dx_2 + g(t) \end{cases}$$

tem forma matricial $x' = Ax + h(t)$ com

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: 2ª Lei de Newton

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Forma matricial dos sistemas lineares de 1ª ordem

Exemplo 2: massa-mola acoplado

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2 \\
x_2' = -\frac{k_1+k2}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 \\
x_3' = x_4 \\
x_4' = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{b_2}{m_2}x_4
\end{cases}
$$

tem forma matricial $x' = Ax$ com

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & +\frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix}
$$

PVI e Teorema de Existência e Unicidade

Problema de Valor Inicial

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, A matriz $n \times n$:

$$\begin{cases} x' = Ax + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{PVI}$$

Teorema de Existência e Unicidade

Se $h : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua em um intervalo aberto I e $t_0 \in I$, então (PVI) tem uma única solução $x(t)$ definida em I.

n graus de liberdade!

Como $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem n entradas arbitrárias
$\implies$ n graus de liberdade.

Soluções dos sistemas de EDOs lineares homogêneos

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, A matriz $n \times n$, considere o sistema

$$x' = Ax \tag{SH}$$

Propriedades

- O conjunto das soluções do sistema de EDOs é espaço vetorial de dimensão n
- Sejam $x^1(t), x^2(t), \dots x^n(t)$ soluções
- São soluções LI se $x^1(t_0), x^2(t_0), \dots x^n(t_0)$ forem vetores LI para algum t_0
  (T.E.U.: e portanto para todo $t_0 \implies$ use $t_0 = 0$)
- Solução geral

$$x = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

Buscando soluções da forma $x = e^{\lambda t} v$

- Seja x solução do sistema homogêneo de EDOs

$$x' = Ax$$

da forma $x = e^{\lambda t} v$ com $v \neq 0$ constante.

- $x' = \lambda e^{\lambda t} v$
- Substituindo no sistema de EDOs

$$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} v = A \cancel{e^{\lambda t}} v \implies Av = \lambda v$$

- Portanto λ é autovalor e v é seu autovetor!

Exemplo: resolva o sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

- Calcule os autovalores e autovetores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1$$
$$\dots$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Os autoovetores são LI.

Exemplo: resolva o sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

- Cada autovetor LI dá uma solução LI

$$x^1 = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x^2 = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Sistema de duas equações:
  precisamos de duas soluções LI, que já temos.
- Solução geral:

$$x = c_1 x^1 + c_2 x^2 = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E se houver menos de n soluções?

Buscando soluções da forma $x = e^{\lambda t}(tv + w)$

- $x = e^{\lambda t}(tv + w)$
- $x' = e^{\lambda t}(t\lambda v + \lambda w + v)$
- Substituindo no sistema e igualando oos termos polinomiais

$$x' = Ax$$
$$\cancel{e^{\lambda t}}(t\lambda v + \lambda w + v) = A\cancel{e^{\lambda t}}(tv + w)$$
$$Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = 0$$
$$Aw = \lambda w + v \implies (A - \lambda I)w = v$$

Exemplo: resolva o sistema de EDOs

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} x$$

- Buscando autovalores e autovetores

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(6-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

- Autovalor: $\lambda = 5$ (multiplicidade 2)
- Autovetor: $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies a = b$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies x^1 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Apenas uma solução até agora.

Exemplo: resolva o sistema de EDOs

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} x$$

- Buscando outra solução, da forma $x = e^{\lambda t}(tv + w)$
- Vimos: $$(A - \lambda I)v = 0 \qquad \text{(feito)}$$ $$(A - \lambda I)w = v$$
- Autovetor: $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies -c + d = 1 \implies d = c + 1$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies x^2 = e^{5t}\left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{5t} \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

Exemplo: resolva o sistema de EDOs

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} x$$

- Solução geral:

$$x = c_1 e^{5y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$