# MAE-5725 - MODELOS LINEARES
## 5ª Lista de Exercícios

*Profa. Silvia N. Elian*

1) Seja $\underset{\sim}{Y} = X\underset{-}{\beta} + \underset{-}{\in}$ um modelo linear de posto não completo e $\underset{\sim}{\ell}'\underset{-}{\beta}$ e $\underset{\sim}{m}'\underset{-}{\beta}$ duas funções estimáveis.

a) Mostre que $\underset{\sim}{\ell}'\underset{-}{\beta}$ é invariante com a solução $\beta^0$ de $X'X\beta = X'\underset{\sim}{Y}$.

b) Calcule $\mathrm{Cov}\left(\underset{\sim}{\ell}'\beta^0, \underset{\sim}{m}'\beta^0\right)$

2) Considere o modelo de Análise de Variância com dois fatores $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \in_{ij}$, $i = 1,2\ldots a$, $j = 1,2\ldots b$ com $\in_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independentes.

Prove que:

a) $\mu$ não é estimável
b) $\alpha_i$ não é estimável
c) $\alpha_i - \alpha_p$ é estimável, $i \neq p$
d) $\beta_j - \beta_\ell$ é estimável, $j \neq \ell$
e) $\mu + \alpha_i + \beta_j$ é estimável.

3) Prove que qualquer combinação linear das funções estimáveis $a_1'\beta$, $a_2'\beta$ ... $a_k'\beta$ é também uma função estimável.

4) No modelo linear geral $Y = X\beta + \in$, de posto incompleto, prove que $q'\beta$ é estimável se e somente se $q'H = q'$, onde $H = GX'X$.

5) Adotando o modelo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \in_{ij}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2 \ldots n_i$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ e $n_3 = 3$ para os dados da tabela

| Nível de Escolaridade | Índice de Investimento (Y) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Colégio Incompleto | 74. | 68. | 77. | 60 |
| Colégio Completo | 76. | 80. | 70 | |
| Graduado | 85. | 93. | 90 | |

a) Obtenha o sistema de equações normais e uma solução $b^0$ do mesmo.

b) Escreva o modelo acima como um modelo de posto completo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_{1i} + \beta_2 W_{2i} + \in_i$ onde

$$(W_1, W_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{para colégio incompleto} \\ (1,0) & \text{para colégio completo} \\ (0,1) & \text{para graduado,} \end{cases}$$

apresentando a matriz de planejamento X.

c) Através do modelo do item (b), teste a hipótese de igualdade dos investimentos médios para os três grupos

6) No modelo $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \in_{ij}$, $i = 1,2$ $j = 1,2,3$, $\underset{\sim}{\in} \sim N\left(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I\right)$,

a) Escreva a matriz X e o vetor $\underset{\sim}{\beta}$.

b) Prove que $\tau_1 + \tau_2$ não é estimável

c) Mostre que $\underset{\sim}{\beta}^0 = [\overline{Y}_1, 0, \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1]'$ é uma solução do sistema de equações normais.

d) Com base em c), obtenha o estimador NVUVM de $\tau_1 - \tau_2$.

7) No problema anterior, obtenha $\beta^{0'} X' Y$ e verifique que coincide com $\beta^{*'} X' Y$, onde $\beta^* = [0, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2]'$ é outra solução do sistema de equações normais.

8) No modelo de posto não completo, prove que todas as linhas de $X'X\beta$ são estimáveis.

9) Resolva os exercícios 13.18, 13.19, 13.20, 13.21 e 13.22, capítulo 13, Graybill.

10) No modelo de Análise de Variância com um fator, obtenha a distribuição de probabilidades do estimador do contraste $\sum_{i=1}^{a} c_i\alpha_i$, $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$. Usando o fato que $\frac{(n-a)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-a}$, derive o teste de hipóteses para $H_0 : \Sigma c_i\alpha_i = 0$.

11) Considere o modelo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $j = 1, 2 \ldots n_i$, $i = 1, 2, 3$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, variáveis aleatórias independentes. 10

a) Utilizando o exercício 3), obtenha o teste de hipóteses para $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$.

b) Derive o teste da razão de verossimilhança generalizada para $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$.

c) Prove que os testes dos itens a) e b) são equivalentes.

12) Os dados a seguir correspondem à resistência de certo material produzido por quatro diferentes máquinas A, B, C, e D.

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 9 | 12 |
| 4 | 7 | 9 | 8 |
| 5 | 6 | | |

a) Teste a hipótese de igualdade das resistências médias do material produzido pelas quatro máquinas.

b) Teste a hipótese de igualdade das resistências médias para as máquinas A e B.

c) Construir um intervalo de confiança com coeficiente 0,95 para a resistência média do material produzido pela máquina D.