Geometria Analítica

Produto Vetorial

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Produto Vetorial

$$\begin{cases} \vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{cases}$$

Produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k} \\ \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = 21\vec{i} + 35\vec{j} + 14\vec{k}$$

Produto Vetorial

$$\begin{cases} \vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{cases}$$

Produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Propriedades do produto vetorial:

I) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times i$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k}$$

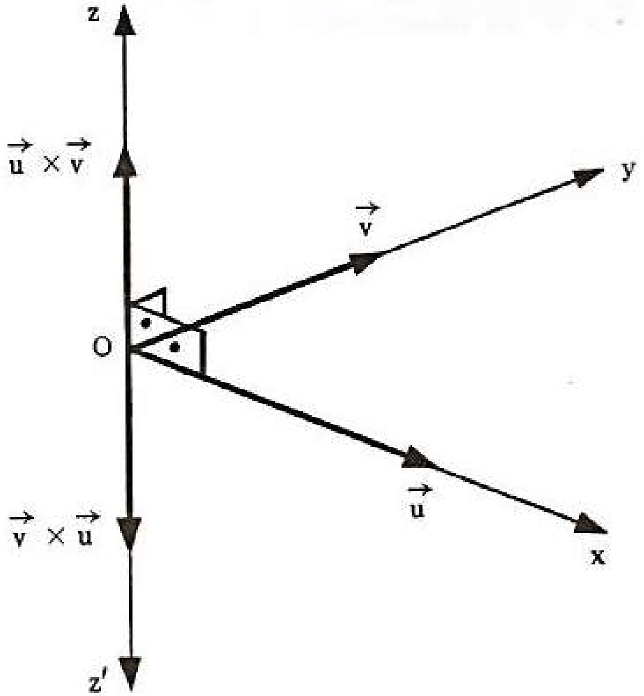
III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

IV) $(m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (m\vec{v})$

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

VI) $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

VII) Sentido do vetor resultante

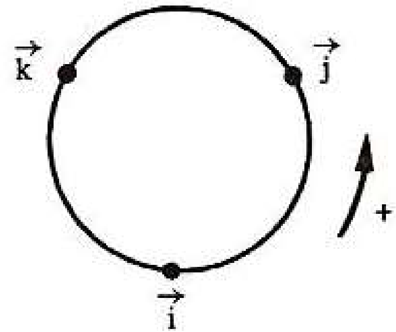


$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



VIII) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

IX) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.sen\theta$$

X) O produto vetorial não é associativo.

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$$

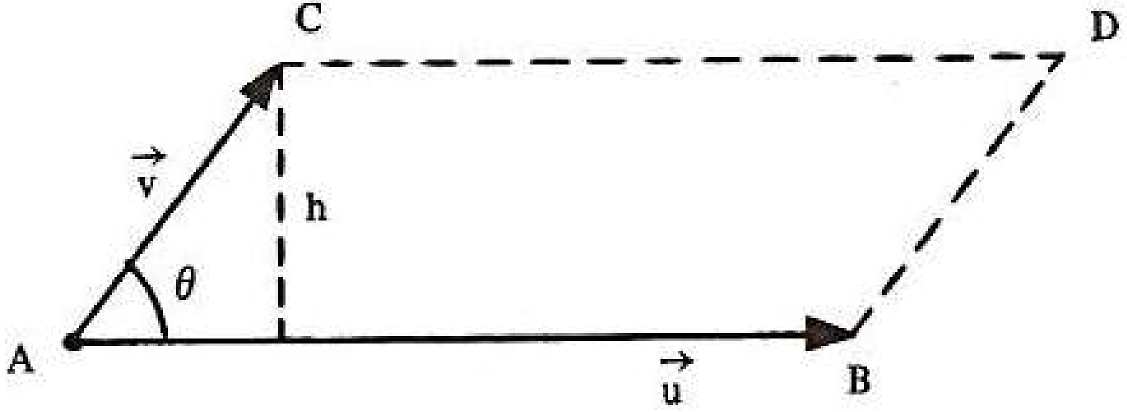
Definição

Fixada uma orientação de $\mathbb{V}^3$, o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor, indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tal que:

a) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
b) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:
   - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$,
   - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$,
   - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva

Interpretação geométrica da norma do produto vetorial

Geometricamente, a norma do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABCD determinado pelos vértices $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ = Área ABCD

Exemplos

1) Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores:

$$\begin{cases} \vec{u} = (2,-6,3) \\ \vec{v} = (4,3,1) \end{cases}$$

Exemplos

2) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

$$\begin{cases} \vec{u} = (1,2,-1) \\ \vec{v} = (0,-1,3) \end{cases}$$

Exemplos

3) Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

$$\begin{cases} \vec{u} = (3,1,-1) \\ \vec{v} = (\alpha,0,2) \end{cases}$$

Exemplos

4) Calcular a área do triângulo de vértices A (1, -2, 1), B (2, -1, 4) e C (-1, -3, 3).