

- Com isso, é suficiente que:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Ou seja:

$$|W_1(j\omega) S(j\omega)| \leq 1 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Portanto:

$$\|W_1 S\|_{\infty} \leq 1$$

### NOTA

$$|W_1(j\omega)| \geq \frac{1}{[1 - \ell_m(\omega)] \delta_r(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_r)$$

$$|W_1(j\omega)| \geq \frac{1}{[1 - \ell_m(\omega)] \delta_d(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_d)$$

$$|W_1(j\omega)| \geq \frac{|F(j\omega)|}{[1 - \ell_m(\omega)] \delta_f(\omega)} \quad (\omega \leq \omega_b)$$

$|W_1(j\omega)|$  suficientemente pequeno<sup>(\*)</sup> para as demais frequências.

Ver figura 7.6 das Notas de Aula (pg. 99)

(\*) Ver Seção 7.10.

NOTA

- Apêndice D  $\rightarrow$  forma comum na literatura para a condição de robustez do acompanhamento de referência e de rejeição da perturbação:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \{ |W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_3(j\omega)T(j\omega)| \} < 1$$

7.4 - ROBUSTEZ DA REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

- Condição de Robustez da Rejeição do Erro de Medida:

$$|T(j\omega)| \leq \frac{\delta_n(\omega)}{1 + \ell_m(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_n)$$

- Seja a Condição de Robustez da Estabilidade:

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Escolhemos a função de ponderação  $W_3(s)$

real, racional, estável e de fase mínima tal que:

$$\frac{1}{|W_3(j\omega)|} \leq \begin{cases} \frac{1}{\ell_m(\omega)} & (\omega \notin \Omega_n) \\ \frac{1 + \ell_m(\omega)}{\delta_n(\omega)} & (\omega \in \Omega_n) \end{cases}$$

- Então é suficiente que  $|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_3(j\omega)|} \quad (\omega \in \mathbb{R})$

$$|W_3(j\omega) T(j\omega)| < 1 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Em termos da norma  $H_\infty$ , é suficiente que

$$\|W_3 T\|_\infty < 1$$

- Ver figura 7.7 das Notas de Aula (pg. 99)

### 7.5 - COMPROMISSO ENTRE OS REQUISITOS DE PROJETO EM BAIIXAS E ALTAS FREQUÊNCIAS

- Escolha de  $W_1(s)$  e  $W_3(s)$  a partir de desigualdades  $\Rightarrow$

alguma arbitrariedade

- Devem, contudo, respeitar uma restrição...
- Condição de Robustez do Desempenho em Baixas Freqs.:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Condição de Robustez da Estabilidade + Rejeição do Erro de Medida:

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_3(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Porém:

$$S(j\omega) + T(j\omega) \equiv 1 \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Portanto:

$$|S(j\omega) + T(j\omega)| = 1 \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Desigualdade Triangular:

$$\underbrace{|S(j\omega) + T(j\omega)|}_{1} \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)| \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Mas:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

$$+ |T(j\omega)| < \frac{1}{|W_3(j\omega)|} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

$$1 \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)|} + \frac{1}{|W_3(j\omega)|} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

- Conclusão

$$\frac{1}{|W_1(j\omega)|} + \frac{1}{|W_3(j\omega)|} > 1 \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

Assim:

- $W_1(j\omega)$  e  $W_3(j\omega)$  não podem ser simultaneamente "grandes"

- Desigualdade reflete o compromisso entre as restrições de baixas e de altas frequências (necessidade de espaço entre as barreiras)

### 7.6 - LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE

- condição de Robustez da Limitação do Esforço de Controle:

$$|K(j\omega)S(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n)$$

- Seja a função de ponderação  $W_2(s)$  real, racional, estável e de fase mínima tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \\ \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \text{ suficientemente grande} \quad (\omega \notin \Omega_n) \end{array} \right.$$

- Então é suficiente que  $|K(j\omega)S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$

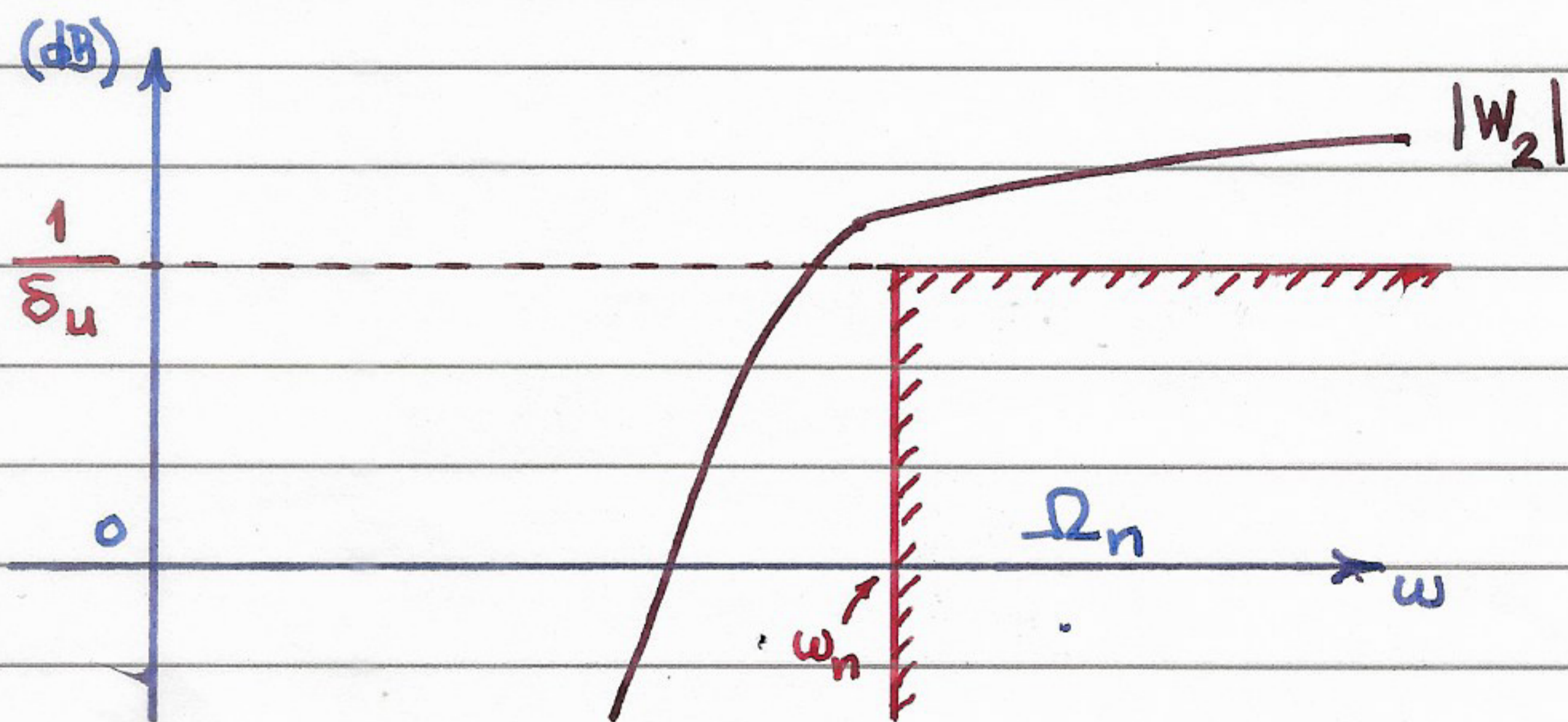
- Ou seja :

$$|W_2(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)| \leq 1 \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \boxed{\|W_2 K S\|_{\infty} \leq 1}$$

- Graficamente :

$$\begin{cases} |W_2(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_u(\omega)} & (\omega \in \Omega_n) \\ |W_2(j\omega)| \text{ suficientemente pequeno} & (\omega \notin \Omega_n) \end{cases}$$

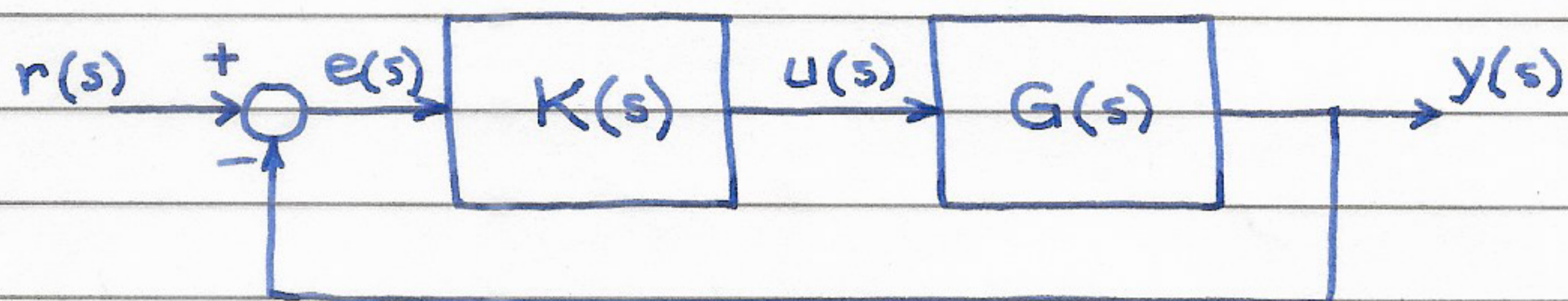


- NOTA

- Problema reescrito na forma de desigualdades envolvendo  $\|\cdot\|_{\infty}$
- No início  $\rightarrow$  soluções buscadas no domínio da frequência (difícil!)
- Domínio do tempo (espaço de estados)

- Em seguida: reformulação do problema usando variáveis de estado

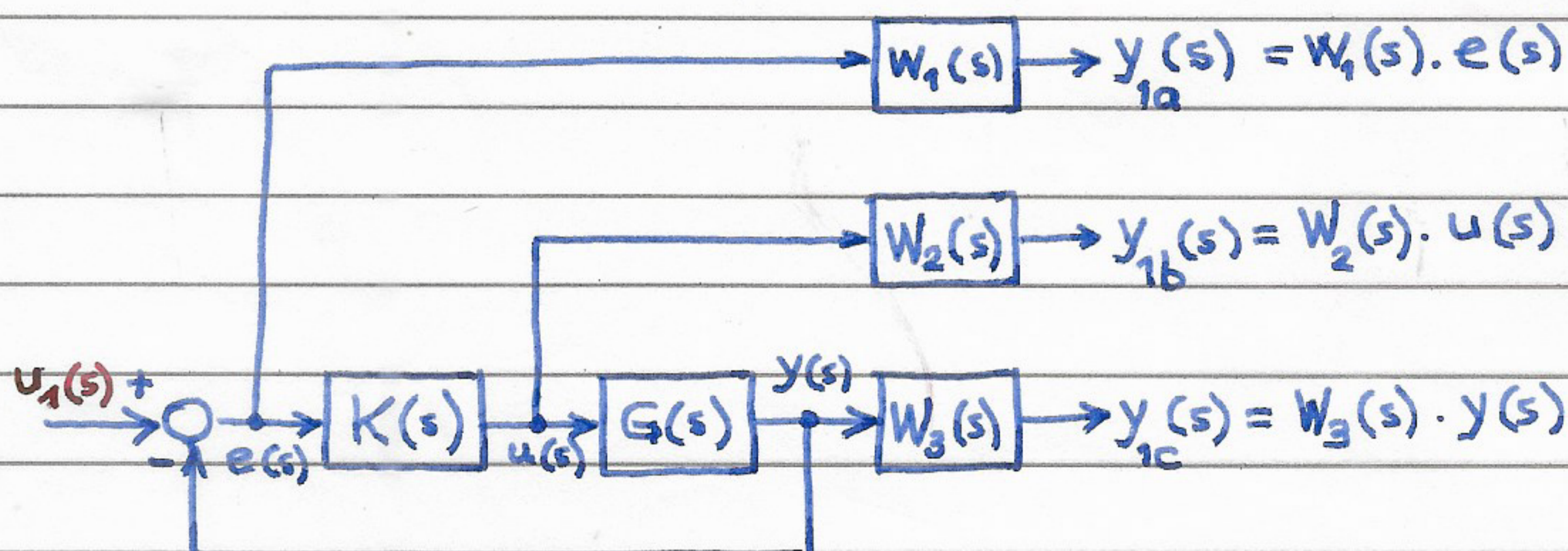
## 7.7 - O PROBLEMA $H_{\infty}$ SUB-ÓTIMO



- Temos:

$$\begin{cases} S(s) = \frac{e(s)}{r(s)} \\ K(s) S(s) = \frac{u(s)}{r(s)} \\ T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} \end{cases}$$

- Com estas relações podemos desenhar o diagrama:



$u_1(s)$  - entrada abstrata

$y_{1a}(s)$ ,  $y_{1b}(s)$ ,  $y_{1c}(s)$  - saídas abstratas

### 7.7.1 - ACOMPANHAMENTO DE REFERÊNCIA E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO E COMPATIBILIDADE ENTRE O PRÉ-FILTRO E A MALHA FECHADA

- $y_{1a}(s) = W_1(s) e(s) = W_1(s) S(s) u_1(s)$

- A condição de robustez do acompanhamento de referência e rejeição de perturbação + compatibilidade...

$$\|W_1 S\|_{\infty} \leq 1$$

pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{|y_{1a}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} \leq 1} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}),$$

pois

$$\frac{y_{1a}(s)}{u_1(s)} = W_1(s) S(s).$$

- Ganho entre a entrada  $u_1$  e a saída  $y_{1a}$  deve ser  $\leq 1$  ( $\forall \omega$ )

### 7.7.2 - LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE

- $y_{1b}(s) = W_2(s) u(s) = W_2(s) K(s) S(s) u_1(s)$

- A condição de robustez da limitação do esforço de controle

$$\|W_2 K S\|_{\infty} \leq 1$$

pode ser reescrita como



$$\boxed{\frac{|y_{1b}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} \leq 1} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}),$$

pois

$$\frac{y_{1b}(s)}{u_1(s)} = W_2(s) K(s) S'(s).$$

- Ganho entre a entrada  $u_1$  e a saída  $y_{1b}$  deve ser  $\leq 1$  ( $\forall \omega$ )

### 7.7.3 - ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE E REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

- $y_{1c}(s) = W_3(s) y(s) = W_3(s) T(s) u_1(s)$

- A condição de robustez da estabilidade e rejeição do erro de medido

$$\|W_3 T\|_{\infty} < 1$$

pode ser expressa como

$$\boxed{\frac{|y_{1c}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} < 1} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}),$$

pois

$$\frac{y_{1c}(s)}{u_1(s)} = W_3(s) T(s).$$

- Ganho entre a entrada  $u_1$  e a saída  $y_{1c}$  deve ser  $\leq 1$  ( $\forall \omega$ )

## • Resumo

O problema de projeto (TODO!) foi colocado na forma de ganho  $\leq 1$  (ou  $< 1$ ) considerando uma entrada ( $u_1$ ) e três saídas ( $y_{1a}$ ,  $y_{1b}$  e  $y_{1c}$ ).

### 7.7.4 - A FORMULAÇÃO DA SENSIBILIDADE MISTA

• Definimos:

$$y_1(s) = \begin{bmatrix} y_{1a}(s) \\ y_{1b}(s) \\ y_{1c}(s) \end{bmatrix}$$

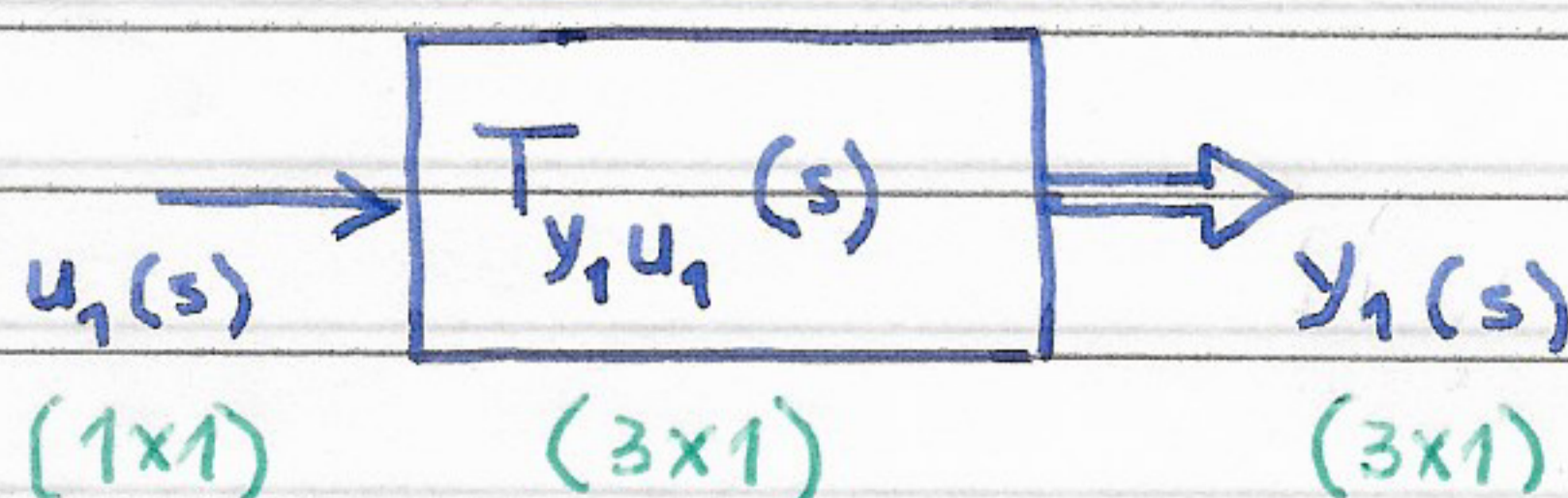
• Matriz de transferência  $T_{y_1 u_1}(s)$  (3x1):

$$y_1(s) = T_{y_1 u_1}(s) u_1(s),$$

$(3 \times 1)$ 
 $(3 \times 1)$ 
 $(1 \times 1)$

isto é:

$$T_{y_1 u_1}(s) = \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) \\ W_3(s)T(s) \end{bmatrix}$$



- Lembrete: se  $F(s) = [f_1(s) f_2(s) \dots f_n(s)]^T$ ,

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(j\omega)|^2}$$

- Portanto, se

$$\|F\|_{\infty} < 1,$$

então

$$|f_i(j\omega)| < 1 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

- Assim, uma condição suficiente para que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{|y_{1a}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} &= |W_1(j\omega)S(j\omega)| \leq 1 \\ \frac{|y_{1b}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} &= |W_2(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)| \leq 1 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}) \\ \frac{|y_{1c}(j\omega)|}{|u_1(j\omega)|} &= |W_3(j\omega)T(j\omega)| < 1 \end{aligned} \right.$$

é

$$\|T_{y_1, u_1}\|_{\infty} < 1$$

- Ou seja:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (\text{FORMA DA SENSIBILIDADE MISTA})$$

- Resumo

- $K(s) = ?$  tal que:

- malha fechada nominal estável

- $\|T_{y,u}\|_{\infty} < 1$

- Nota

Este é o caso particular para

$$\gamma = 1$$

do Problema  $H_{\infty}$  sub-ótimo (ou  $H_{\infty}$  padrão ou  $H_{\infty}$

de pequenos ganhos) em que se busca  $K(s)$

tal que

$$\|T_{y,u}\|_{\infty} < \gamma \quad (\gamma > 0)$$