3. ROTAÇÃO

25/06/2021

Forma Quadrática (FQ):

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$\neq 0$: ROTAÇÃO

$\neq 0$: TRANSLAÇÃO

Define uma CÔNICA no Oxy

Translação e FQ

$$x \longleftarrow x' + h$$

$$y \longleftarrow y' + k$$

FQ no sistema auxiliar $O'x'y'$ transladado:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + D'x' + E'y' + F' = 0$$

$$D' = 2Ah + Ck + D$$

$$E' = Ch + 2Bk + E$$

$$F' = f(h,k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F$$

FORMA QUADRÁTICA ORIGINAL CALCULADA EM h E k.

Para eliminar os termos de translação, $D' = E' = 0$.

Logo, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2Ah + Ck = -D \\ Ch + 2Bk = -E \end{cases}$$

Sendo h, k as coord. da origem do sistema transladado, O'.

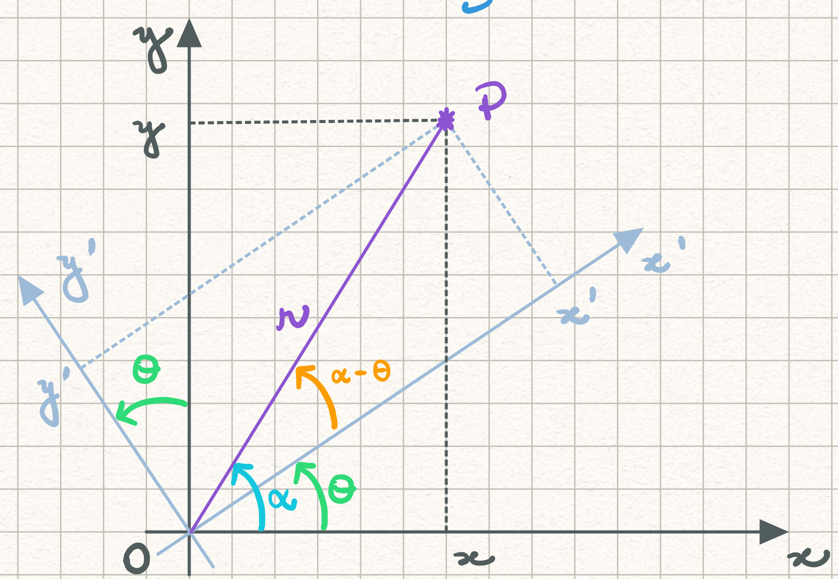
O determinante dos coeficientes do SL não homogêneo está associado ao número de soluções do sistema, o que leva às cônicas e suas degenerações. Portanto, se:

$$\begin{vmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{vmatrix}$$

$\neq 0$: uma única solução (SPD) $\longrightarrow$ circunferência, elipse, hipérbole, ponto, vazio ou 2 retas conc.

$= 0$ $\begin{cases} \text{infinitas soluções (SPI)} \longrightarrow \text{vazio, reta ou 2 retas //s.} \\ \nexists \text{ solução (SI)} \longrightarrow \text{parábola ou vazio.} \end{cases}$

Rotação



$\Sigma'(O, \underbrace{\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}}_{\text{base rotacionada}})$

Sistema Oxy $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Sistema O'x'y' $\begin{cases} x' = r\cos(\alpha - \theta) \\ y' = r\operatorname{sen}(\alpha - \theta) \end{cases}$

De onde se tem :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta - y'\cos\theta \end{cases}$$

Rotação e FQ

$$x \longleftarrow x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y \longleftarrow x'\,\mathrm{sen}\,\theta - y'\cos\theta$$

FQ no sistema auxiliar $O'x'y'$ rotacionado :

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x'y' + D'x' + E'y' + F = 0$$

$$A' = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}^2\theta + C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$B' = A\,\mathrm{sen}^2\theta + B\cos^2\theta - C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$C' = (B-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + C\cos 2\theta$$

$$D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$E' = -D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Para eliminar o termo de rotação , $C' = 0$. Portanto:

$$0 = (B-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + C\cos 2\theta$$

$$-(B-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta = C\cos 2\theta$$

$$\frac{(A-B)}{C} = \frac{\cos 2\theta}{\mathrm{sen}\,2\theta}$$

$$\mathrm{cotg}\,2\theta = \frac{(A-B)}{C} \quad , \quad 0 < 2\theta < \pi$$

θ ... ângulo de rotação , $0 < \theta < \pi/2$

Como $C' = 0$ no sistema rotacionado, falta determinar: A', B', D' e E'.

A' e B' são solução do sistema: $\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = \dfrac{C}{\operatorname{sen} 2\theta} \end{cases}$

D' e E' ... basta substituir D, E, $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ nas expressões.

ESTRATÉGIA

Dada a Forma Quadrática que representa a cônica

Eliminar o termo misto quadrático por meio de ROTAÇÃO.

Eliminar os termos lineares por meio de TRANSLAÇÃO.

Necessários: 2 sistemas auxiliares $\begin{cases} O'x'y' \\ O''x''y'' \end{cases}$

OBS: Começar pela TRANSLAÇÃO é menos trabalhoso, pois quando da aplicação da ROTAÇÃO, $D = E = 0$. No entanto, pode-se começar por qualquer das mudanças de coordenadas.

EXEMPLOS

1) $\underbrace{4}_{A} x^2 + \underbrace{5}_{B} y^2 + \underbrace{4\sqrt{5}}_{C \neq 0} xy - \underbrace{12\sqrt{5}}_{D \neq 0} x + \underbrace{24}_{E \neq 0} y - \underbrace{36}_{F} = 0$

∃ Rotação ∃ Translação

I) Translação : $O'(h, K) \longrightarrow O'x'y'$

Verificando se é possível eliminar os termos lineares fazendo $D' = E' = 0$:

$$\begin{cases} 2Ah + CK = -D \\ Ch + 2BK = -E \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8h + 4\sqrt{5}\,K = 12\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5}\,h + 10K = -24 \end{cases}$$

Classificação da cônica : $\begin{vmatrix} 8 & 4\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} & 10 \end{vmatrix} = 80 - 4\sqrt{5}\,4\sqrt{5} = 80 - 80$

$= 0$ ∴ Solução : Vazio ; Reta ; duas Retas //s ; Parábola

SPI ou SI ∴ Não é possível eliminar os termos lineares.

II) Rotação : $\theta \longrightarrow O'x'y'$, $O' = O$

i) Calculando cotg 2θ e sen 2θ :

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{(A - B)}{C} = \frac{4 - 5}{4\sqrt{5}} = \frac{-1}{4\sqrt{5}}$$

$$\text{sen } 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cotg}^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1/4\sqrt{5})^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Por que $\sqrt{81} = 9$ e não -9 ?

Como $0 < 2\theta < \pi$ então $0 < \theta < \pi/2$

No 1º quadrante : $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta > 0$

Logo : $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta > 0$

Sistema $O'x'y'$: $C' = 0$ ($\nexists$ rotação). Falta determinar A', B', D' e E'.

A' e B' : $\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = \dfrac{C}{\operatorname{sen} 2\theta} \end{cases}$

$\begin{cases} A' + B' = 9 \\ A' - B' = 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} A' = 9 \\ B' = 0 \end{matrix}$

Como $\begin{cases} D' = f(\theta) = D \cos\theta + E \operatorname{sen}\theta \\ E' = g(\theta) = -D \cos\theta + E \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, é necessário calcular $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$:

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta = \operatorname{cotg} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta = \left(\frac{-1}{4\sqrt{5}}\right)\frac{4\sqrt{5}}{9} = -\frac{1}{9}$$

Assim, $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ podem ser obtidos através do sistema:

$\begin{cases} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \operatorname{sen}\theta = \sqrt{5}/3 \\ \cos\theta = 2/3 \end{matrix}$

($\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta > 0$ pois $0 < \theta < \pi/2$)

Substituindo D, E, senθ e cosθ em D' e E':

$$D' = 0$$

$$E' = 36$$

Como o termo independente não se altera ($F' = F$), no sistema $O'x'y'$ (em que $C' = 0$), a FQ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

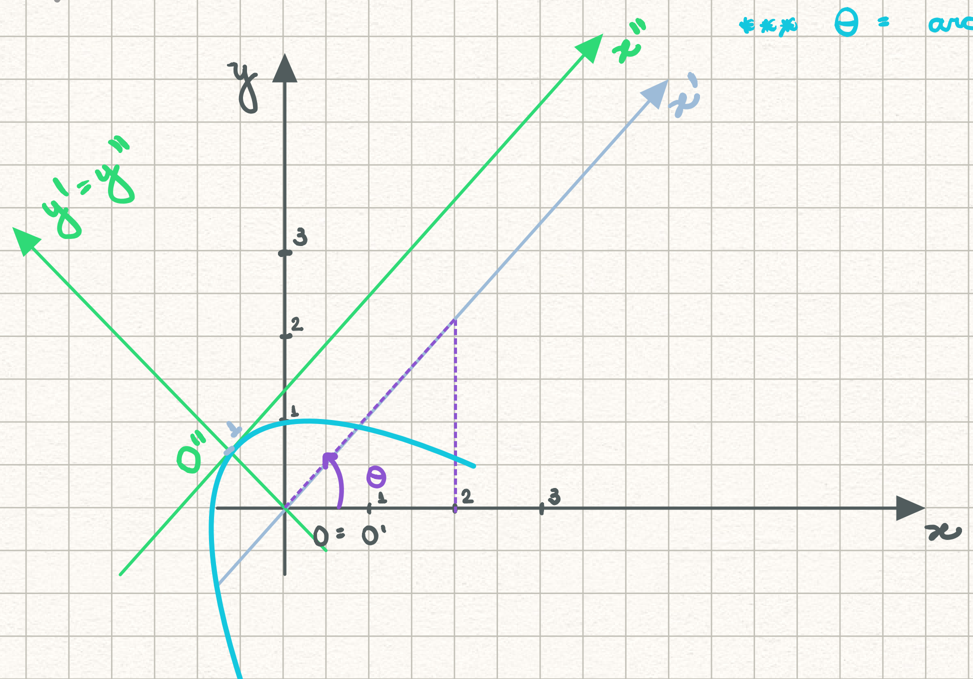
ou

$$9x'^2 + 36y' - 36 = 0$$

Essa FQ equivale à equação: $x'^2 = -4(y' - 1)$

Parábola
- ES // $O'y'$
- $V(0,1)$ no sistema $O'x'y'$ (rotacionado)
- Concavidade (−)
- Rotacionada de θ em relação a Oxy

*** $\theta = \text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ c.o. / c.a.



② $\underset{A}{4x^2} + \underset{B}{7y^2} - \underset{C}{4xy} + \underset{D}{12x} + \underset{E}{6y} - \underset{F}{9} = 0$

∃ Rotação   ∃ Translação

I) Translação : $O'(h,k) \longrightarrow O'x'y'$

Verificando se é possível eliminar os termos lineares fazendo $D' = E' = 0$:

$$\begin{cases} 2Ah + Ck = -D \\ Ch + 2Bk = -E \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8h - 4k = 12 \\ -4h + 14k = 6 \end{cases}$$

Classificação da cônica : $\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} = 112 - 16 = 96$

$\neq 0$ ∴ Solução : Vazio ; Ponto ; Circunferência ; Elipse ; Hipérbole ; Duas Retas Concorrentes

SPD : $h = -2$; $k = -1$: coord. da origem do sist. transladado $O'x'y'$

O único termo que se altera na translação é o independente :

$$F' = f(h,k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F$$

$$F' = -24$$ //

Como os termos quadráticos não se alteram na translação ($A' = A$, $B' = B$ e $C' = C$) e os termos lineares são eliminados ($D' = E' = 0$), no sistema $O'x'y'$ a FQ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A' x'^2 + B' y'^2 + C' x' y' + F' = 0$$

ou

$$4x'^2 + 7y'^2 - 4x'y' - 24 = 0 \qquad \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

II) Rotação : $\theta \longrightarrow O''x''y''$, $O'' = O'$

Agora, pretende-se determinar a FQ no sistema $O''x''y''$, em que o termo que remete à rotação desaparece ($C'' = 0$).

i) Calculando cotg 2θ e sen 2θ :

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{(A - B)}{C} = \frac{4 - 7}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen } 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cotg}^2 2\theta}} = \frac{4}{5}$$

Sistema $O''x''y''$: $C'' = 0$ ($\nexists$ rotação). Falta determinar A'' e B'' (como $D' = E' = 0$, não é necessário calcular D'' e E''):

$$A'' \text{ e } B'' : \begin{cases} A'' + B'' = A' + B' \\ A'' - B'' = \dfrac{C'}{\text{sen } 2\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'' + B'' = 11 \\ A'' - B'' = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} A'' &= 3 \\ B'' &= 8 \end{aligned}$$

Como o termo independente não se altera ($F'' = F'$) , no sistema $O''x''y''$ (em que $C'' = 0$) , a FQ pode ser reescrita da seguinte maneira :

$$A'' x''^2 + B'' y''^2 + F'' = 0$$

ou

$$3x''^2 + 8y''^2 - 24 = 0$$

Essa FQ equivale à equação: $\dfrac{x''^2}{8} + \dfrac{y''^2}{3} = 1$

Elipse $\begin{cases} \text{EM em } O''x'' \\ C(-2,-1) \text{ em relação a } Oxy \\ \text{Rotacionada de } \theta \text{ em relação a } O'x'y' \end{cases}$

*** $2\theta = \operatorname{arccotg}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ $3 \to$ c.a. $4 \to$ c.o.