MAT0164 - Números Inteiros: Uma Introdução à Matemática
LISTA 5
2021

1. Para cada uma das equações diofantinas lineares, ou determine todas as soluções inteiras, ou mostre que não há soluções inteiras.

   (a) $17x + 13y = 100$
   (b) $21x + 14y = 147$
   (c) $60x + 18y = 97$
   (d) $12x + 18y = 50$
   (e) $30x + 47y = -11$
   (f) $30x + 17y = 300$
   (g) $12X + 30Y + 15Z = 24$
   (h) $8X + 4Y + 3Z = 11$

2. Determine todos os múltiplos positivos de 11 e de 9 cuja soma seja 270.

3. Determine todos os números naturais menores do que 1000 que têm resto 9 na divisão por 37

4. Determine o menor inteiro positivo que tem como restos 16 e 27, quando dividido, respectivamente por 39 e 56.

5. Certo senhor, ao descontar um cheque em seu banco, recebeu, sem notar, o número de reais trocado pelo número de centavos e vice-versa. Em seguida, gastou 68 centavos e observou surpreso, que tinha o dobro da quantia original do cheque. Determinar o menor valor possível no qual o cheque foi preenchido.

6. A que número entre 0 e 6 é congruente módulo 7 o produto
$$9 \times 18 \times 2322 \times 13 \times 19?$$

7. A que número entre 0 e 3 é congruente módulo 4 a soma
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{19}?$$

8. Determine o resto da divisão por 7 do número

   (a) $10^{10^1} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{100}}$
   (b) $1^7 + 2^7 + ... + 100^7$
   (c) $1^6 + 2^6 + ... + 100^6$
   (d) $2222^{5555} + 5555^{2222}$

9. Para os números m abaixo, a que número entre 0 e m é congruente módulo m a soma
$$1! + 2! + 3! + ... + 10!?$$

   (a) 3
   (b) 11
   (c) 4
   (d) 23

10. Sejam $a, p \in \mathbb{N}$ com p primo. Mostre que se $a^2 \equiv 1 (\text{mod } p)$ então $a \equiv 1 (\text{mod } p)$ ou $a \equiv -1 (\text{mod } p)$. É o mesmo resultado verdadeiro se p não for um número primo?

11. Determine o algarismo da unidade do número 9^{9^9}.

12. Ache os algarismos da dezena e da unidade do número 7^{999999}.

13. Mostre que a soma dos quadrados de quatro números naturais consecutivos não pode ser um quadrado.

14. Mostre que o número de Mersenne $M_{83} = 2^{83} - 1$ não é primo apesar de 83 ser primo. (Mostre que $2^{83} \equiv 1 (\text{mod } 167)$.)

15. Mostre que o número de Fermat $F_5 = 2^{2^5} + 1$ não é primo. (Note que $641 = 5^4 + 2^4$ e que $641 = 5 \times 2^7 + 1$. Mostre que $641 | F_5$).)

16. Mostre que se a, b, c e m são inteiros tais que $c > 0$, $m > 0$ e $a \equiv b (\text{mod } m)$, então $ac \equiv bc (\text{mod } mc)$.

17. Mostre que $n^7 \equiv n(\text{mod } 42)$ para todo inteiro n.

18. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$. e seja $a \in \mathbb{Z}$. Mostre que $a \equiv 0(\text{mod } mn)$ se, e somente se $a \equiv 0(\text{mod } m)$ e $a \equiv 0(\text{mod } n)$. Mostre através de um exemplo que a hipótese de $mdc(m, n) = 1$ é essencial.

19. Quais são todos os inteiros positivos m com a propriedade : "Para todo inteiro a, se $a^2 \equiv 0(\text{mod } m)$ então $a \equiv 0(\text{mod } m)$. "

20. Mostre que se n é um inteiro tal que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ então n não é uma soma de quadrados de dois inteiros.

21. Mostre por indução no inteiro positivo n que $4^n \equiv 1 + 3n(\text{mod } 9)$.

22. Seja N um inteiro positivo que se escreve na base 10 como

$$N = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + ... + r_1 10 + r_0.$$

Mostre que (**Regras de Divisibilidade**):

(a) $2|N$ se, e somente se, $2|r_0$.
(b) $3|N$ se, e somente se, $3|(r_n + r_{n-1} + ... + r_1 + r_0)$.
(c) $5|N$ se, e somente se, $5|r_0$.
(d) $9|N$ se, e somente se, $9|(r_n + r_{n-1} + ... + r_1 + r_0)$.
(e) $11|N$ se, e somente se, $11[(-1)^n r_n + (-1)^{n-1} r_{n-1} + ... - r_1 + r_0]$.
(f) Mostre que N é divisível por 7 se, e somente se, $N_1 = (r_n r_{n-1} .... r_2 r_1)_{10} + 5r_0$ é divisível por 7.
Sugestão: Mostre que $10(N_1 + 5r_0) \equiv N(\text{mod } 7)$.

23. (a) Mostre que nenhum quadrado perfeito se escreve com todos os seus algarismos iguais.
(b) Determinar um quadrado perfeito $N = (aabb)_{10}$.

24. Encontre todos os números N de 3 dígitos na representação decimal com N divisível por 11 e $\frac{N}{11}$ é igual à soma dos quadrados dos dígitos de N.

25. Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n-ésimo Número de Fermat. Mostre que

(a) Se $n \geq 2$ então o algarismo da unidade é 7.
(b) Se $n \geq 1$ então $F_n \equiv 5(\text{mod } 12)$.
(c) Mostre que nenhum número de Fermat pode ser um quadrado ou um cubo.

26. Mostre que 47 divide um e apenas um dos números $2^{23} - 1$ ou $2^{23} + 1$.

27. Ache o resto da divisão de 12^{p-1} por p quando p é primo.

28. Mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}$ o número

$$\frac{3}{5}n^5 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{15}n$$

é inteiro.

29. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ de mesma paridade e $a \in \mathbb{Z}$. Mostre que $3|(a^n - a^m)$.

30. Seja p um número primo positivo tal que $p \neq 2$ e $p \neq 5$. Mostre que p divide infinitos números com todos os algarismos iguais, isto é, $p|(aa...a)_{10}$ onde $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$.

Sugestão: Prove que $10^{n(p-1)} \equiv 1(\text{mod } p)$ para todo inteiro $n > 0$.

31. Seja a um inteiro. Provar que:

(a) $a^{21} \equiv a(\text{mod } 15)$ e $a^7 \equiv a(\text{mod } 42)$

(b) Se $\text{mdc}(a, 35) = 1$ então $a^{12} \equiv 1 (\text{mod } 35)$

(c) Se $\text{mdc}(a, 42) = 1$ então $(3 \times 7 \times 8) | (a^6 - 1)$

32. Seja $p > 2$ um primo. Mostrar que

$$1^p + 2^p + ... + (p-1)^p \equiv 0 (\text{mod } \ p).$$

33. Mostrar que $2^8 \equiv 1 (\text{mod } 17)$.

34. Sejam p um primo e a um inteiro tal que $p \nmid a$. Provar que

    (a) Se $p > 2$, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } \ p)$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\text{mod } \ p)$.

    (b) O menor inteiro positivo e tal que $a^e \equiv 1 (\text{mod } \ p)$ é divisor de $(p-1)$.

    (c) Se e é o inteiro acima e x é um inteiro tal que $a^x \equiv 1 (\text{mod } \ p)$ então $e | x$.

35. Determine o resto da divisão de a por b nos casos:

    (a) $a = 5^{60}$ e $b = 26$

    (b) $a = 3^{100}$ e $b = 10$

36. Sejam p, q primos distintos e ímpares tais que $(p-1) | (q-1)$. Mostre que se $\text{mdc}(a, pq) = 1$ então $a^{q-1} \equiv 1 (\text{mod } (pq))$.

37. Seja a um inteiro. Provar que

    (a) $a^{37} \equiv a (\text{mod } 1729)$

    (b) $a^{79} \equiv a (\text{mod } 158)$

38. Mostre que $2730 | (n^{13} - n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

39. Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$. Mostre que se $\text{mdc}(a, m) = 1$ se, e somente se, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $ar \equiv 1 (\text{mod } m)$. Além disso, mostre que se $at \equiv 1 (\text{mod } m)$ então $t \equiv r (\text{mod } m)$.

40. Determine todos os valores de x tais que:

    (a) $5x \equiv 3 (\text{mod } 24)$

    (b) $23x \equiv 7 (\text{mod } 19)$

    (c) $3x \equiv 1 (\text{mod } 10)$

    (d) $7x \equiv 5 (\text{mod } 18)$

41. Sejam p, q primos tais que $q = p + 2$ e $p > 3$. Mostre que $p + q \equiv 0 (\text{mod } 12)$.

42. Mostre que se $n > 1$ é tal que $(n-1)! + 1 \equiv 0 (\text{mod } n)$ então n é primo.

43. Sejam p e q números primos positivos com $p \neq q$. Mostre que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } \ pq.)$

44. Mostre que $13 | (2^{70} + 3^{70})$.

45. Mostre que

    (a) $37 \mid 7\underbrace{00 \cdots 0}_{3n+1}3$

    (b) $37 \mid 3\underbrace{00...0}_{3n}7$.

46. Mostre que o dígito das dezenas de qualquer potência de 3 é par.

47. Mostre que para todo n **ímpar** o número

$$s_n = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$$

termina em 28 quando escrito na representação decimal.