SME 341 / SLC 609
Assunto: Equações Diferenciais
Aula EDO-4 – EDOs de 2ª ordem Não Homogêneas

Prof. Miguel Frasson

Junho de 2021

Resumo 2ª ordem

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(LH)}$$

- O conjunto de soluções de (LH) é espaço vetorial de dim. 2.
- Em ouras palavras, a solução geral de (LH) é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- soluções $e^{\lambda t}$ $\rightarrow$ eq. característica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
- Caso 1: 2 raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

- Caso 2: 1 única raiz real λ

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}$$

- Caso 3: raízes complexas conjugadas... aula de hoje.
- EDOs de 2ª ordem não homogêneas: aula de hoje.

Raízes complexas conjugadas $\lambda = p \pm iq$

- $y_1 = e^{(p+iq)t} = e^{pt}e^{iqt}$,
  $y_2 = e^{(p-iq)t} = e^{pt}e^{-iqt}$ são soluções de (LH)
- ... mas o que é e^{iqt}?

Exponencial complexa $e^{i\theta}$

- Séries de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

- Potências de i:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots$$

Exponencial complexa $e^{i\theta}$

- Série de $e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

- Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Partes real e imaginária de soluções complexas são soluções

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{LH}$$

- Suponha $y(t) = u(t) + iv(t)$ solução complexa de (LH)
- Queremos soluções reais para (LH)!
- $y = u + iv \implies y' = u' + iv' \implies y'' = u'' + iv''$
- Como y é solução:

$$\begin{aligned} 0 &= ay'' + by' + cy \\ &= a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) \\ &= \underbrace{(au'' + bu' + cu)}_{=0} + i\underbrace{(av'' + bv' + cv)}_{=0} \end{aligned}$$

- Portanto, $u = \Re y$ e $v = \operatorname{Im} y$ são soluções reais de (LH)

Se $\lambda = a + bi$ é raiz complexa da equação característica...

- $y = e^{\lambda t}$ é solução de (LH)

$$\begin{aligned} y = e^{\lambda t} &= e^{(a+ib)t} = e^{at+ibt} \\ &= e^{at} e^{ibt} = e^{at}\big(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt)\big) \\ &= \underbrace{e^{at}\cos(bt)}_{\text{parte real}} + i\,\underbrace{e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)}_{\text{parte imag.}} \end{aligned}$$

- Portanto, $y_1 = e^{at}\cos(bt)$ e $y_2 = e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$ são soluções de (LH)
- (aula anterior) $W(0) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = b \neq 0$
- $y_1 = e^{at}\cos(bt)$ e $y_2 = e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$ são duas soluções LI

Resumo: caso $\lambda = a + ib$ é raiz complexa

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{LH}$$

- Eq. caract.: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ tem raiz complexa $\lambda = \alpha + i\beta$
- Escreva a solução complexa

$$z(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \underbrace{e^{\alpha t}\cos(\beta t)}_{\text{parte real}} + i\,\underbrace{e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)}_{\text{parte imag.}}$$

- Parte real é uma solução real: $y_1 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$
- Parte imaginária é outra solução real: $y_2 = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$
- São soluções LI
- Solução geral:

$$y = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{at}\operatorname{sen}(\beta t)$$

Exemplo: resolva $y'' + 2y' + 2y = 0$

- Eq. característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
- $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 \implies \sqrt{\Delta} = 2i$
- $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -1 \pm i$
- Tome uma raiz complexa: $\lambda = -1 + i$
- Solução complexa:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(-1+i)t} = e^{-t} e^{it} = e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\ &= \underbrace{e^{-t} \cos t}_{\text{parte real}} + i \underbrace{e^{-t} \operatorname{sen} t}_{\text{parte imag.}} \end{aligned}$$

- Soluções reais: parte real e parte imaginária de $z(t)$

$$y_1 = e^{-t} \cos t, \qquad y_2 = e^{-t} \operatorname{sen} t$$

- Solução geral: $y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t$

Exemplo: resolva o PVI $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

- Eq. característica: $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda = \pm i$
- Tome uma raiz complexa: $\lambda = i$
- Solução complexa:

$$z(t) = e^{it} = \underbrace{\cos t}_{\text{parte real}} + i \underbrace{\operatorname{sen} t}_{\text{parte imag.}}$$

- Solução geral: $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$
- Usando condições iniciais: $1 = y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = c_1$
- $y'(t) = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \implies$
  $-1 = y'(0) = -c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 \implies c_2 = -1$
- Solução do PVI: $y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$

Resumo até aqui: resolvemos a HOMOGÊNEA

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(LH)}$$

- Equação característica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
- Caso 1: 2 raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  - $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
  - Solução geral de (LH): $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- Caso 2: 1 única raiz real λ
  - $y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}$
  - Solução geral de (LH): $y = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$
- Caso 3: raízes complexas conjugadas $\lambda = p \pm q$
  - solução complexa: $z(t) = e^{\lambda t} = \cdots = e^{pt} \cos qt + ie^{pt} \operatorname{sen} qt$
  - y_1 = parte real de $z(t)$: $y_1 = e^{at} \cos(bt)$
  - y_2 = parte imaginária de $z(t)$: $y_2 = e^{at} \operatorname{sen}(bt)$
  - Solução geral de (LH): $y = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \operatorname{sen}(bt)$

EDOs não homogêneas

Contando o final da história antes...

$$ay'' + by' + cy = h(t) \tag{L}$$

- Chamamos de homogênea associada à EDO

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{HA}$$

- Sejam y_1 e y_2 soluções LI da homogênea associada.
- Seja y_p uma solução qualquer de (L), que chamamos de solução particular
- A solução geral de (L) é a soma da solução geral da homogênea com a solução particular, isto é,

$$y = c_1 y_1 + c_1 y_2 + y_p$$

Vamos mostrar isso...

Passos:

- Se y e w são soluções de (L),
  a diferença $z = y - w$ é solução de (HA) $\rightarrow$ próximo slide
- Então $z = c_1 y_1 + c_2 y_2$
  (pois essa é a forma das soluções da homogênea)
- Então $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + w$
- Como y é arbitrária, concluímos que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + w$ é a forma de todas as soluções!
- Apenas chamamos w de y_p:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

$z = y - w$ é solução da homogênea

- Sejam y e w soluções de (L):

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= h(t) \\ aw'' + bw' + cw &= h(t) \end{aligned}$$

- Fazendo $z = y - w$ e subtraindo as equações:

$$a\underbrace{(y'' - w'')}_{z''} + b\underbrace{(y' - w')}_{z'} + c\underbrace{(y - w)}_{z} = h(t) - h(t) = 0$$

- Portanto,

$$az'' + bz' + cz = 0$$

isto é, z é solução da homogênea associada.

RESUMO

$$ay'' + by' + cy = h(t) \qquad \text{(L)}$$

1. Resolva a homogênea associada (HA): ache y_1 e y_2 (já estudamos)
2. Ache uma solução particular y_p de (L) (a seguir)
3. Solução geral:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Exemplo 1: $y'' + 5y' + 6y = 12$

1. Resolver a homogênea
   - Homogênea associada: $y'' + 5y' + 6y = 0$
   - Equação característica:
     $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$
   - $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{-3t}$
2. Achar uma solução particular
   - por inspeção, note que $x_p = 2$ é uma solução
3. Solução geral:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 2$$

Métodos para encontrar soluções particulares

1. Método da Variação dos Parâmetros (esta aula)

   Vantagem fácil de explicar e aplicar
   serve para todas as EDOs

   Desvantagem resolver integrais

2. Método dos Coeficientes a Determinar (não estudaremos)

   Vantagem Contas fáceis, apenas contas algébricas

   Desvantagem Muitos casos
   Algumas EDOs simples

Método da Variação dos Parâmetros

Motivação:

- Aproveitar que as soluções da homogênea são LI, portanto

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall t$$

- Se montássemos um sistema com essa matriz de coeficientes, esse sistema sempre tem solução
- Esse método se aproveita disso para calcular y_p da forma

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_2y_2$$

onde u_1, u_2 são funções (não constantes) que temos que descobrir

Derivando $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

- $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ (2 termos)
- $y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$ (4 termos)
- Dessa forma, y_p'' terá 8 termos (é ruim)
- Faremos uma simplificação (a 1ª linha de nosso sistema)

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

- Com a simplificação

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

- $y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$

Substituindo as derivadas em (L)

$$\begin{aligned} h(t) &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\ &= a(u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'') \\ &\quad + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) \end{aligned}$$

agrupando termos com u_1, u_1', u_2, u_2'

$$\begin{aligned} &= u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') \\ &\quad + u_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} \end{aligned}$$

Portanto

$$u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') = h(t) \implies u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{h(t)}{a}$$

Das duas equações formamos um sistema

- u_1' e u_2' satisfazem as equações

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 && \text{(simplificação)} \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= \frac{h(t)}{a} && \text{(eq. anterior)} \end{aligned}$$

- Montamos o sistema (que sempre tem solução)

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}$$

- Resolvendo o sistema, achamos u_1' e u_2'
- Integrando essas funções, achamos u_1 e u_2
- Pronto! $\quad y_p = u_1y_1 + u_2y_2.$

RESUMO: Método da Variação dos Parâmetros

1. Forma de y_p: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
2. Sistema:
$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}$$
3. Resolver o sistema para achar u_1' e u_2'
4. Integrar para achar u_1 e u_2

Retomando o exemplo: $y'' + 5y' + 6y = 12$

1. Resolver a homogênea

$$y_1 = e^{-2t}, \quad y_2 = e^{-3t}$$

2. Achar y_p pelo Método da Variação dos Parâmetros
   - $a = 1,\ h(t) = 12.$

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3. Solução geral:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 2$$

Retomando o exemplo: $y'' + y = \sec t$

1. Resolver a homogênea

$$y_1 = \cos t, \quad y_2 = \operatorname{sen} t$$

2. Achar y_p pelo Método da Variação dos Parâmetros
   - $a = 1,\ h(t) = \sec t.$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan t \\ 1 \end{pmatrix}$$

   - $u_1 = -\int \tan t = \ln|\cos t| + \cancelto{0}{C_1}, \quad u2 = t + \cancelto{0}{C_2}$
   - $y_p = \cos t \times \ln|\cos t| + t \operatorname{sen} t$

3. Solução geral:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \cos t \times \ln|\cos t| + t \operatorname{sen} t$$