Segue que $\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \ \forall \ (x,y) \neq (0,0)$ (nos casos em que $x=0$ ou $y=0$, isso é óbvio) e portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$\exists \lim_{(x,y)\to 0} \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = 0 \Rightarrow f \text{ é contínua em } (0,0) \quad \blacksquare$$

—/—

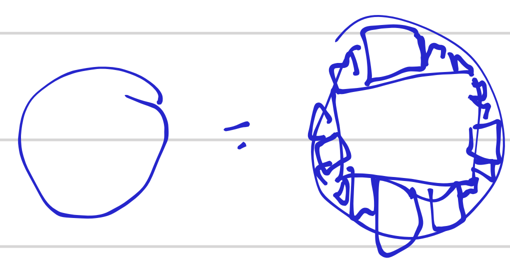
Monitoria 24/06/2021

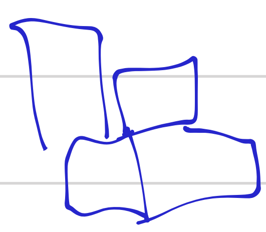
A lim.

① Conteúdo e Medida Nulos

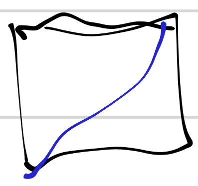
→ Definição (monitorias de 10/06 e 15/06)

→ Exs (monitoria de 15/06):





1) Um ponto, $\{x\}$, tem cont. nulo

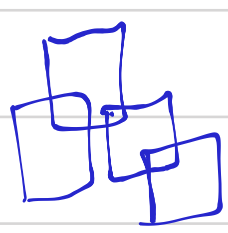
2)  tem cont. nulo

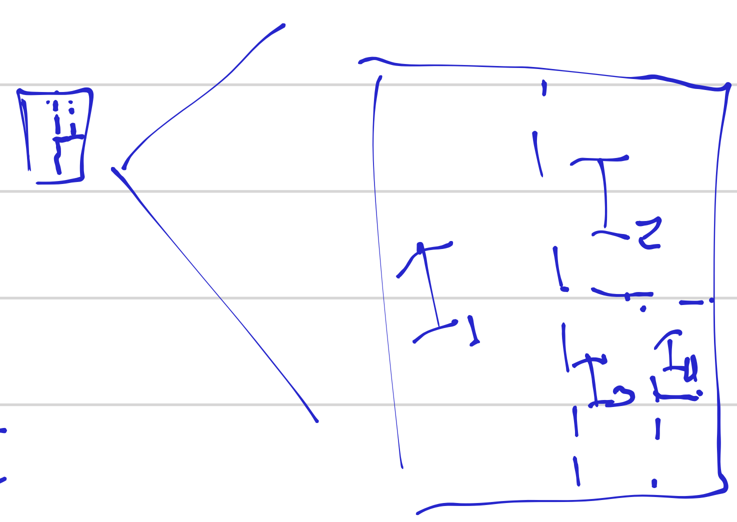
3) Gráf f, $f: K \to \mathbb{R}$ contínua, $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$

—/—

→ Propriedades:

1) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo, então A tem medida nula





$\sum \text{vol} < \varepsilon$

2) Se $B \subset A$ e A tem conteúdo nulo (resp., medida nula), então B também tem conteúdo nulo (resp., medida nula)

$$B \subset A \subset \bigcup I_k$$

3) Se $A_1, \ldots, A_n$ têm conteúdo nulo, então $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ também tem conteúdo nulo.

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} I_i^{(1)}, \ldots, A_n \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} I_i^{(n)}$$

em que $\sum_{i=1}^{N_k} \operatorname{vol} I_i^{(k)} < \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall \ 1 \leq k \leq n$

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{N_k} I_i^{(k)}, \quad \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{N_k} \operatorname{vol} I_i^{(k)}}_{< \frac{\varepsilon}{n}} < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

$\boxtimes$

4) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ é uma sequência infinita de conjuntos de medida nula, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida nula.

Dem. similar a 3), mas preciso lembrar que se $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ é uma sequência de conjuntos enumeráveis, então

$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é também enumerável

—//—

Mais exemplos:

4)* $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\mathbb{Q}$ é enumerável: $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

↳ A é enumerável: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

↳ A é união enumerável de pontos $A_i = \{a_i\} \Rightarrow A$ tem medida nula

Pergunta: A tem conteúdo nulo?

NÃO!! A prova é por contradição: assuma que A tem conteúdo nulo e sejam $I_1, I_2, \dots, I_N$ tais que $A \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$ e $\sum_{K=1}^{N} vol(I_K) < \frac{1}{2}$.

vol $= I_K$

$$B = [0,1] \setminus \overline{\bigcup_{K=1}^{N} I_K} \supset [0,1] \setminus \bigcup_{K=1}^{N} \overline{I_K}$$

fecho da união finita $\subset$ união finita dos fechos

$$I_K = \begin{cases} [a,b] \\ [a,b) \\ (a,b] \\ (a,b) \end{cases} \Rightarrow vol = b-a$$

$$vol\, B = 1 - vol\left(\bigcup_{K=1}^{N} \overline{I_K}\right)$$

$[0,\ )\ (\ \ )\ (\ \ )\ (\ \ )\ (\ ,1]$

$$vol\left(\bigcup_{K=1}^{N} \overline{I_K}\right) = vol\left(\overline{I_1} \cup (\overline{I_2} \setminus \overline{I_1}) \cup (\overline{I_3} \setminus (\overline{I_1} \cup \overline{I_2})) \cup \dots \cup \left(\overline{I_N} \setminus \bigcup_{K=1}^{N-1} \overline{I_K}\right)\right) =$$

$\overline{I_1}$ $\overline{I_2}$ $\overline{I_3}$

$$= vol(\overline{I}_1) + vol(\overline{I}_2 \setminus \overline{I}_1) + vol(\overline{I}_3 \setminus (\overline{I}_1 \cup \overline{I}_2)) + \cdots$$

$$+ vol\left(\overline{I}_N \setminus \left(\bigcup_{K=1}^{N-1} \overline{I}_K\right)\right) \leq \sum_{K=1}^{N} vol(\overline{I}_K) = \sum_{K=1}^{N} vol(I_K)$$

(os termos contidos em $\bigcup$ e o último contido em $\overline{I}_N$, isto é, $\overline{I}_N \setminus (\ldots) \subset \overline{I}_N$)

$$vol(B) \geq 1 - \sum_{K=1}^{N} vol\, I_K > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusão: B é um aberto de volume positivo $\Rightarrow$ B é aberto não-vazio

$\hookrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Q} \cap B \subset A \cap [0,1] \setminus A = \emptyset$ CONTRADIÇÃO!

OBS. 1: EXISTEM CONJUNTOS QUE TÊM MEDIDA NULA MAS NÃO TÊM CONTEÚDO NULO

OBS. 2: A PROP. 4) ACIMA NÃO VALE P/ CONT. NULO

5) m-superfície em $\mathbb{R}^n$, $m<n$, tem medida nula

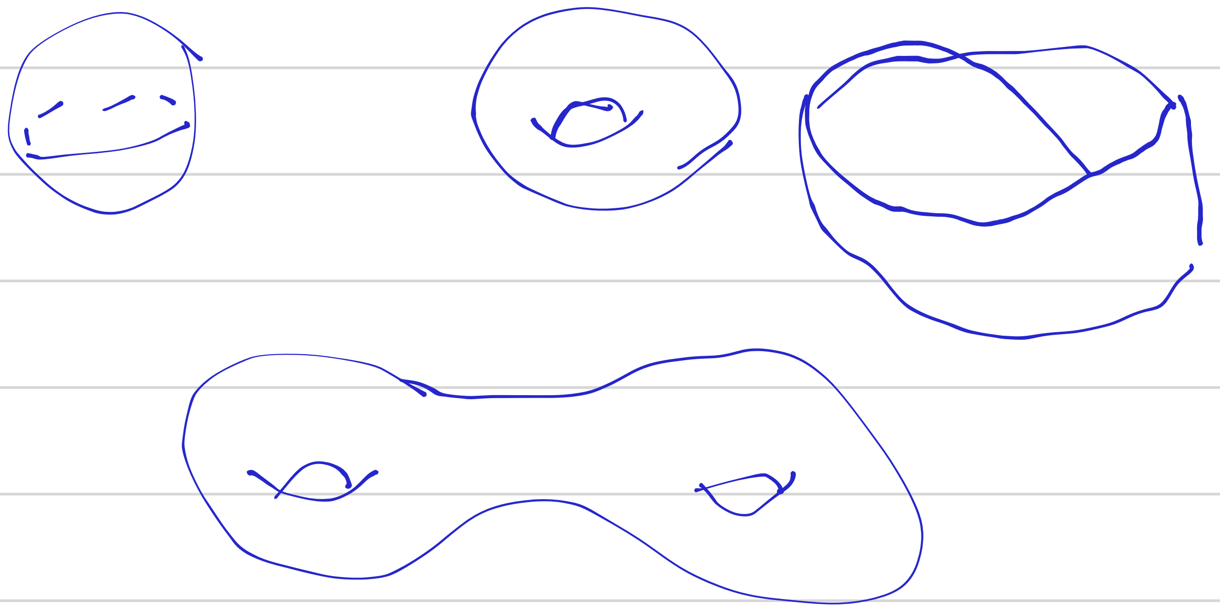
Se M é m-superfície, então cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança V_x t.q.

$$V_x \cap M = \text{Gráf}\ \xi, \quad \xi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1$$

— / —

Teorema: Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e K tem medida nula, então K tem conteúdo nulo.

Corolário 1: Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-superfície compacta, $m < n$, então M tem conteúdo nulo



Corolário 2: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de fronteira regular (lista 4), então $\partial\Omega$ tem conteúdo nulo.

$$\int_{B_1(0)} 1\,dx = \mathrm{vol}(B_1(0))$$

Teorema de Integrabilidade de Lebesgue: Seja Q um intervalo n-dimensional limitado e $f: Q \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

Então f é Riemann-integrável $\Longleftrightarrow$ o conjunto de pontos de descontinuidade de f tem medida nula