Lista 2, ex. 13, caso particular: Prove que a função

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua na origem mas não é diferenciável na origem.

Prova:

⊛ Não Diferenciabilidade Como vimos no ex. 5, $D_v f(0) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^2$.

Assim, f é diferenciável em $0 \iff \exists \lim_{(x,y)\to 0} \dfrac{|f(x,y) - f(0) - D_{(x,y)} f(0)|}{\|(x,y)\|}$

$= 0 \iff \exists \lim_{(x,y)\to 0} \dfrac{\left|\frac{x^3 y}{x^4+y^2}\right|}{|x|+|y|}$, usando $\|\cdot\|_1$

Vamos provar que esse limite não existe. Com efeito, como $f(x,0) = 0$ $\forall x \neq 0$, $\lim_{t\to 0} \dfrac{|f(g(t))|}{|g_1(t)|+|g_2(t)|} = \lim_{t\to 0} \dfrac{0}{|t|} = 0$, onde $g(t) = (t,0)$

Por outro lado, considere a curva $\alpha(t) = (t, t^2)$. Então:

$$\frac{|f(\alpha(t))|}{|\alpha_1(t)|+|\alpha_2(t)|} = \frac{|(t)^3(t^2)|}{(|t|+|t|^2)\,|(t)^4+(t^2)^2|} = \frac{|t|^5}{(|t|+|t|^2)\cdot 2|t|^4} = \frac{1}{2}\,\frac{|t|^5}{|t|^5+|t|^6} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+|t|}\right) \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{2} \neq 0$$

Assim, existem curvas $g(t), \alpha(t)$, com $g(0) = \alpha(0) = (0,0)$, tais que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(g(t))|}{|g_1(t)|+|g_2(t)|} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t\to 0} \frac{|f(\alpha(t))|}{|\alpha_1(t)|+|\alpha_2(t)|}$$

e portanto, $\nexists \lim_{(x,y)\to 0} \dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_1}$. Concluímos que f não é diferenciável em $(0,0)$. ▲

⊛ Continuidade Queremos mostrar que $\exists \lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y) - f(0)| = \lim_{(x,y)\to 0} \left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = 0$

Temos, para $(x,y) \neq (0,0)$: $\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \dfrac{|x|^3|y|}{|x|^4+|y|^2} = \dfrac{|x|^3|y|}{2\cdot\frac{1}{2}(|x|^4+|y|^2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|x|^3|y|}{\frac{|x|^4+|y|^2}{2}}$

Lema (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica): Sejam $a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \geq 0$. Então $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, com igualdade se, e somente se, $a=b$.

Prova: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \geq 0 \Rightarrow |a| - 2\sqrt{ab} + |b| \geq 0$
$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Temos $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \iff \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = |a| = |b| = b$

■

Como vimos, $\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|x|^3|y|}{\frac{|x|^4+|y|^2}{2}}$. Se $x=0$ ou $y=0$, então esse valor já é 0, então precisamos somente se preocupar com o caso $x,y\neq 0 \Rightarrow$ $|x|,|y|>0$. Assim, pelo Lema:

$$\frac{|x|^4+|y|^2}{2} \geq \sqrt{|x|^4|y|^2} = |x|^2|y| > 0$$

e portanto, $\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|x|^3|y|}{\frac{|x|^4+|y|^2}{2}} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{|x|^3|y|}{|x|^2|y|} = \dfrac{1}{2}|x| \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0$

Segue que $\left|\frac{x^3 y}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x| \ \forall \ (x,y) \neq (0,0)$ (nos casos em que $x=0$ ou $y=0$, isso é óbvio) e portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$\exists \lim_{(x,y)\to 0} \left|\frac{x^3 y}{x^4+y^2}\right| = 0 \Rightarrow f \text{ é contínua em } (0,0)$$
