

$$\left| \frac{q_1(t)^3 q_2(t)}{q_1(t)^4 + q_2(t)^2} \right| = \left| \frac{t^7}{t^4 + t^8} \right| = \left| \frac{t^3}{1 + t^4} \right| \Rightarrow 0$$

N DIF: $\frac{|x^3 y - 0 - 0|}{\|(x, y)\|_2} = \frac{|x^3 y|}{(|x| + |y|)(x^4 + y^2)} =$

$$= \frac{|x|^3 |y|}{(|x| + |y|)(|x|^4 + |y|^2)} \quad g(t) = (t, t^2)$$

$$\hookrightarrow \frac{|t|^3 |t^2|}{(|t| + |t^2|)(|t|^4 + |t^2|^2)} = \frac{|t|^5}{2|t|^5 + 2|t|^6} > \frac{1}{2 + 2|t|}$$

$\searrow \frac{1}{2}$

_____ / _____

Monitors 22/06

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{|x|^3 |y|}{|x|^4 + |y|^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

0

$$\underline{x=0}: y \neq 0, f(0,y) = 0 = f(0,0)$$

y=0: SIMILAR'

$$\underline{x,y \neq 0}: \frac{|x|^3 |y|}{|x|^4 + |y|^2} \leq \frac{|x|^2}{\frac{|x|^2}{|y|} + \frac{|y|}{|x|}} =$$

$$= \frac{|x|^2}{|x|^2 \left(\frac{|x|}{|y|} \right) + \left(\frac{|y|}{|x|} \right)} \leq \text{TRAMBOLO} \rightarrow 0$$

$$= \frac{|x|^2}{|x|^2 \left(\frac{|x|}{|y|} \right) + \left(\frac{|y|}{|x|} \right)}$$

RECÍPROCOS

$$a, \frac{1}{a} \rightarrow a \downarrow, \frac{1}{a} \uparrow \quad \left| \frac{1}{a} \downarrow, a \uparrow \right.$$

2 CASOS:

$$* \text{CASO 1: } \frac{|x|}{|y|} \leq 1 \Rightarrow \frac{|y|}{|x|} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x|^2 \left(\frac{|x|}{|y|} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{|y|}{|x|}}_{\geq 1} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{|x|^2}{|x|^2 \left(\frac{|x|}{|y|} \right) + \frac{|y|}{|x|}} \leq \frac{|x|^2}{1} = |x|^2$$

$$\text{CASO 2: } \frac{|x|}{|y|} \geq 1 \iff |x| \geq |y|$$

$$\frac{|x|^3 |y|}{|x|^4 + |y|^2} \leq \frac{|x|^3 |y|}{|y|^4 + |y|^2} = |x|^3 \frac{1}{|y|^3 + |y|} =$$

$$\underbrace{\geq |y|^4 + |y|^2}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{|y|}{|x|} \right)^3 + \frac{|y|}{|x|^3}}_{\geq 0}} \leq \frac{|x|^3}{|y|} = |x|^2 \frac{|x|}{|y|}$$

17) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferenciable

Ω aberta conexa não-vazia

$$Df(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Prove que f é constante.

Prova: $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a + tb)\| \cdot \|b - a\|$

(segmento linear entre a e b precisa estar contido em Ω)

$x_0 \in \Omega$ qualquer e seja $N_{f(x_0)}(f) = \{y \in \Omega \mid f(y) = f(x_0)\}$. Então $N_{f(x_0)}(f)$ é fechado em Ω (pré-imagem do fechado $\{f(x_0)\}$ pela f contínua f)

Pergunta: $N_{f(x_0)}(f)$ é aberto em Ω ?

Sim! Por quê?

Seja $x \in N_{f(x_0)}(f)$ qualquer. Tome uma

bolinha aberta $B \subset \Omega$ com centro x

$\hookrightarrow B$ é convexa $\Rightarrow \forall a, b \in B$, o segmento $[a, b] \subset B$



$x \in B$ qualquer. Pela DVM,

$$\|f(y) - f(x)\| = \sup_{z \in [x, y]} \|Df(z) \cdot (y - x)\| = 0$$

$\uparrow$
 0

$\hookrightarrow f(y) = f(x) = f(x_0)$

conclusão: $N_{f(x_0)}(f)$ é aberto e fechado

em $\Omega \Rightarrow$ por conexidade, $N_{f(x_0)}(f) = \Omega \quad \square$