DERIVADAS LATERAIS E DERIVADAS COMO UMA FUNÇÃO

Se a função y=f(x) está definida em x_1 , então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f_+'(x_1)$ é definida por:

$$f_+'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Considerando a mesma condição para a derivada à esquerda, tem-se:

$$f_-'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

- Uma função é **derivável** em um ponto, quando suas derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

- Com base no estudo observa-se que tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função.

- Teorema 1: Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

<u>Demonstração:</u>

Hipótese: *f* é diferenciável em *a*

Tese: *f* é contínua em *a ;* 1- f(x) existe, 2- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, 3- $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

Para demonstrar que f é contínua em a, deve-se mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Como f é diferenciável em *a*, tem-se

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para relacionar a hipótese com a tese dividiremos e multiplicares f(x) – f(a) por (x – a), então tem-se:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a) \right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} . (x - a)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} . \lim_{x \to a}(x - a)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = f'(a).0$$

Para se usar o conceito apresentado na demonstração, começaremos com f(x) somando e subtraindo f(a):

$$f(x) = f(a) + [f(x) - f(a)]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}[f(a) + f(x) - f(a)]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Consequentemente *f* é contínua em *a.*

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

- O Teorema 1 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se não for contínua em *a, então f não é diferenciável em a. Então, em qualquer descontinuidade (por exemplo, uma descontinuidade de salto) f deixa de ser diferenciável.*

- Considerando a função $y = | x |$, *verifica-se que f não é diferenciável em 0, e a Figura 1 mostra que em x = 0 a curva muda abruptamente de direção.*

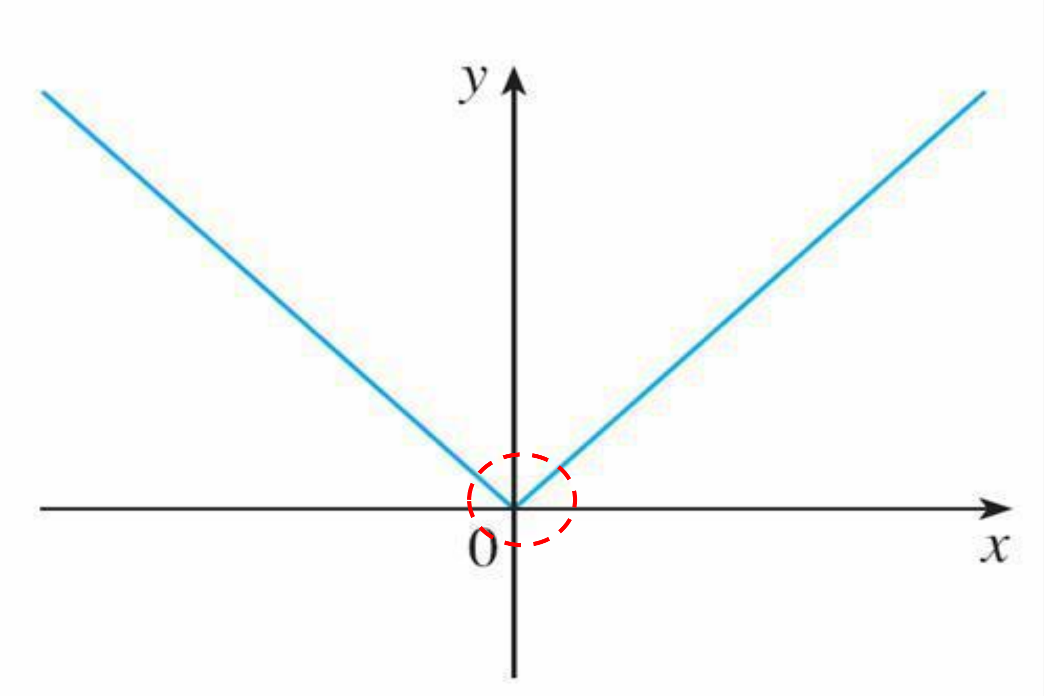

Figura 1- y=f(x)=$|x|$

➢Uma outra possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical quando *x = a; isto é, f é contínua em a e***

$$\lim_{x \to a} \left| f^{'}(x) \right| = \infty$$

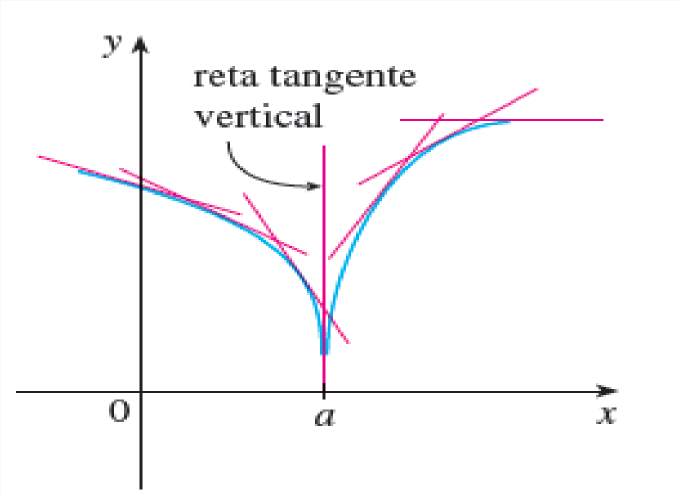

Figura 2- y=f(x)

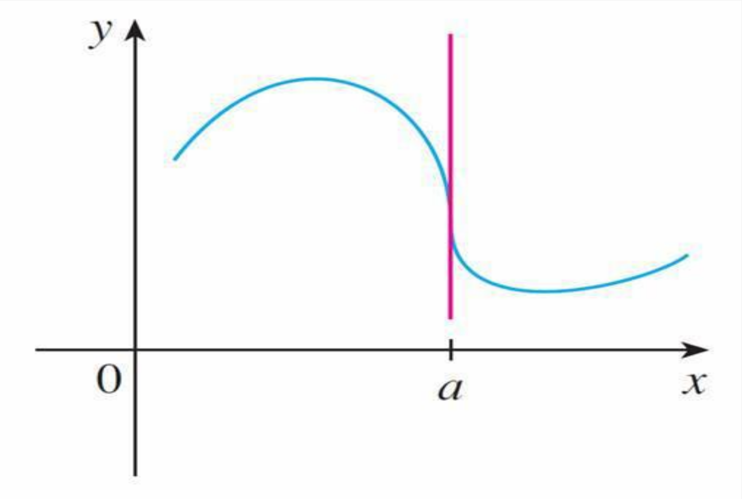

Figura 3- y=f(x)