Tópico 5 - Matrizes - Aula de exercícios 1

quarta-feira, 23 de junho de 2021

Exercício 1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})$ em cada caso:

a. A é do tipo 2×3, e $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j\ , & \text{se } i = j \\ i - 2j\ , & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercício 3. Cinco amigos, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, as despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro.

Considere que nas matrizes S e D abaixo estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e no domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha i e da coluna j representa o que o amigo A_i emprestou ao amigo A_j nesse dia, com i e j variando de 1 a 5.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, o amigo A_4 ainda devia aos demais amigos, em reais, a quantia de:

(a) 10 (b) 15 (c) 31 (d) 41 (e) 72

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & \text{DEVE} & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} - & - & - & A_{14} & - \\ - & - & - & A_{24} & - \\ - & - & - & A_{34} & - \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ - & - & - & A_{54} & - \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{EMPRESTOU} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$A_4 \begin{cases} \text{EMPRESTOU} = 5+2+10+4+5+5 = 31 \\ \text{DEVE} = 10+1+4+2+2+7+11+4 = 41 \end{cases}$$

A_4 ainda deve $= 41 - 31 = 10$

Exercício 5. Determine $a, b,$ e c para que

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+b & 0 & 2a-1 \\ c+1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ 2a-1 = 5 \\ c+1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{b = -1} \\ \boxed{a = 3} \\ \boxed{c = 2} \end{array}$$

Exercício 12. Encontre, se possível, A^{-1}, onde:

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

b. $$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 10 & 6 \\ 4 & 5 \end{matrix}\right|$$

$$= 12 - 80 + 150 - 72 - 50 + 40 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \det(A) = 0$$

$\therefore$ A^{-1} não existe.

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow (-1)L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 + (-1)L_3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \\ 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I} & & & \underbrace{2 \quad -2 \quad -3}_{A^{-1}} & & \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \\ L_2 + (-2)L_3 \\ \end{array}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercício 15. Nos itens 1–6, calcule o determinante da matriz usando (a) a expansão em cofatores e (b) as operações elementares com as linhas para introduzir zeros na matriz (triangularização).

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = A$

Expansão em cofatores:

$$\det A = (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$= -4 - 24 - 2\cdot(18+10)$

$= -4 - 24 - 56$

$= -84$

Triangularização:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 42 = -84$$

Exercício 18. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 4$ e $\det B = 5$. Determine:

a. $\det(AB)$

b. $\det(3A)$

c. $\det(AB)^{-1}$

d. $\det(-A)$

e. $\det(A^{-1}B)$

- $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(k\cdot A) = k^n\cdot\det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

a. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = 4\cdot 5 = 20$

b. $\det(3A) = 3^n\cdot\det(A) = 3^n\cdot 4$

c. $\det[(AB)^{-1}] = \det(B^{-1}\cdot A^{-1}) = \det(B^{-1})\cdot\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(B)}\cdot\dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

d. $\det(-A) = (-1)^n\cdot\det(A) = (-1)^n\cdot 4 = \begin{cases} 4, & \text{se } n \text{ é par} \\ -4, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

e. $\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\cdot\det(B) = \dfrac{1}{4}\cdot 5 = \dfrac{5}{4}$