

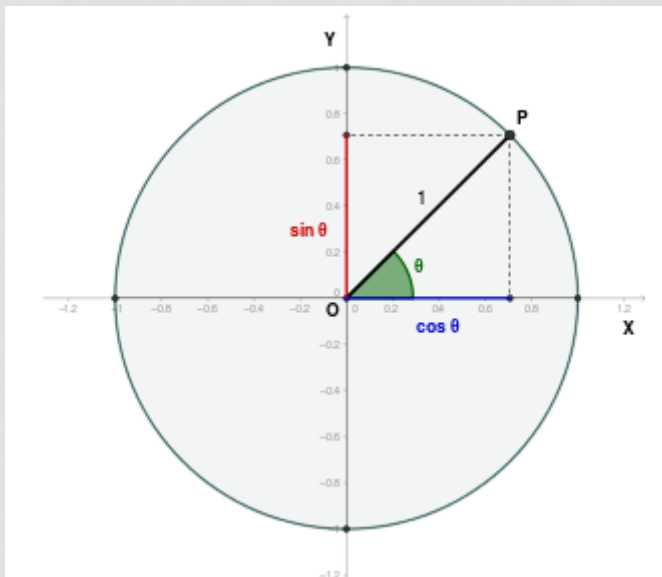
FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

PROFa. DIOVANA A. S. NAPOLEÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS



- O nome Funções Hiperbólicas, dado à combinação das funções exponenciais, se referem à relação que possuem com a hipérbole.

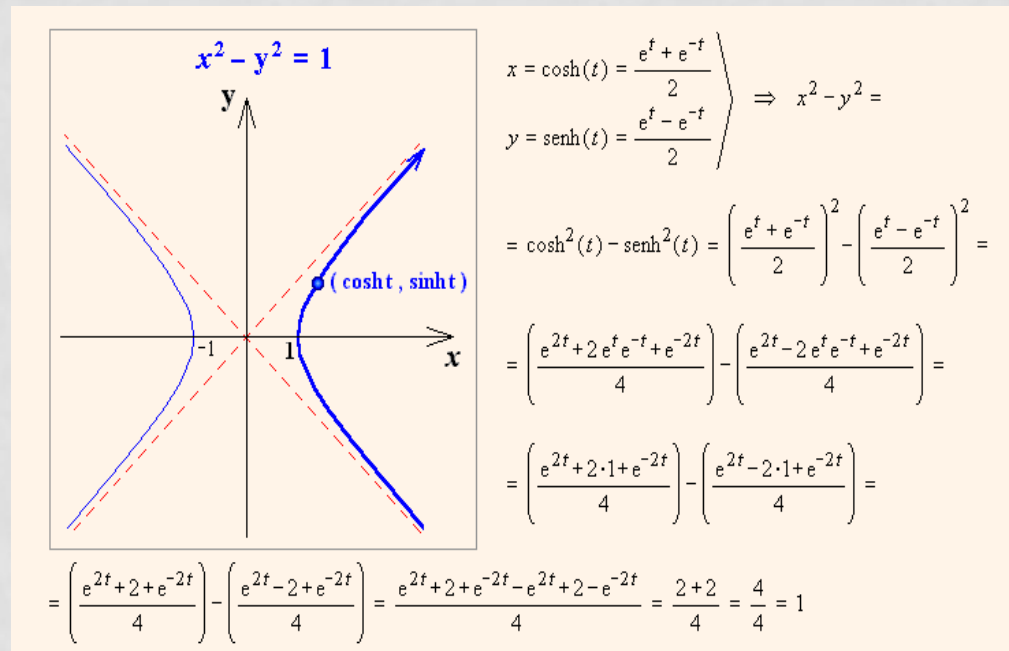
Funções Trigonométricas ou circulares:



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

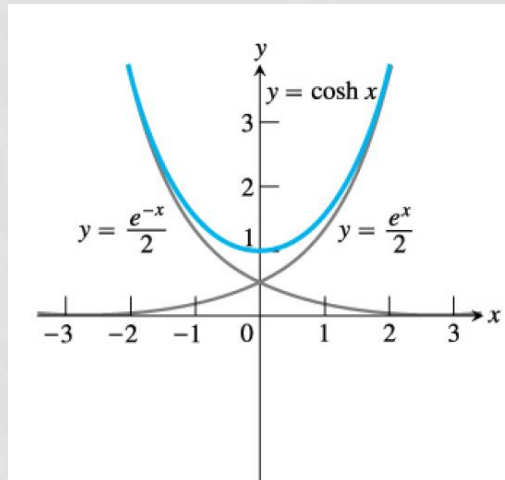
Funções Hiperbólicas:



DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

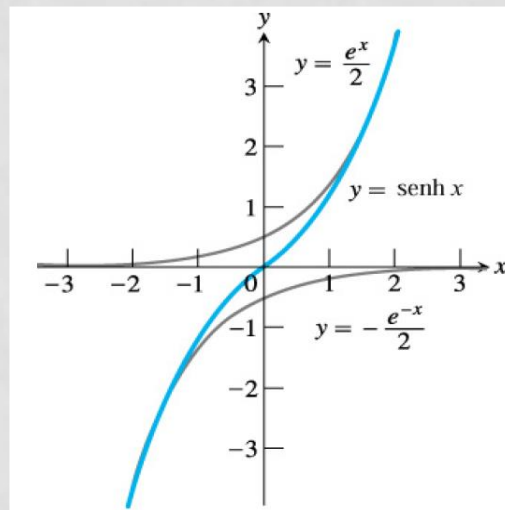
- Cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



- Seno hiperbólico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

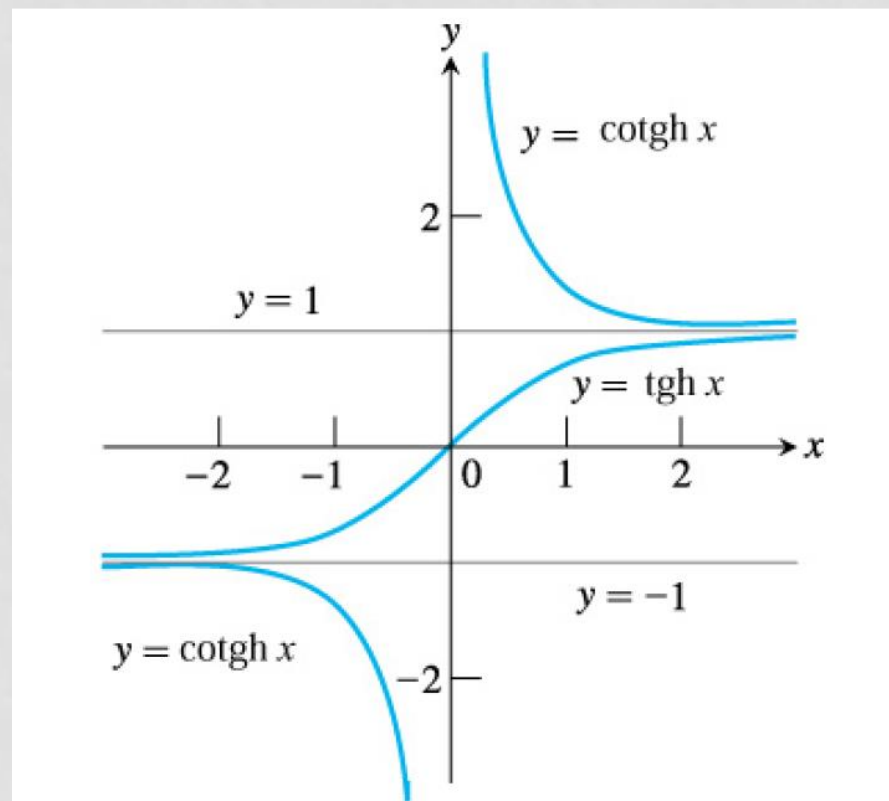


- Tangente hiperbólica

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

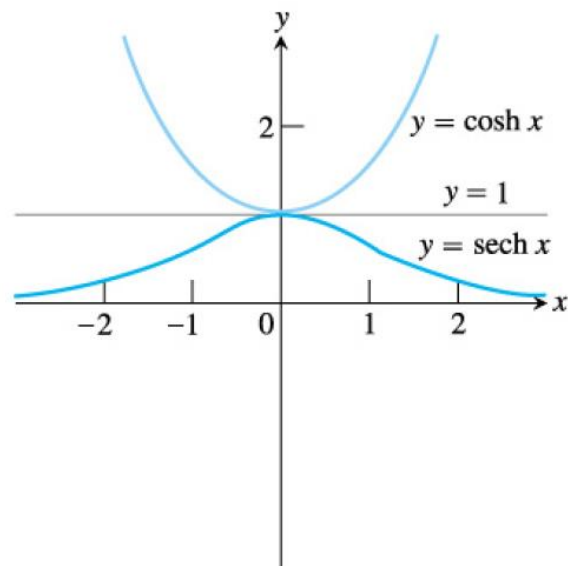
- Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



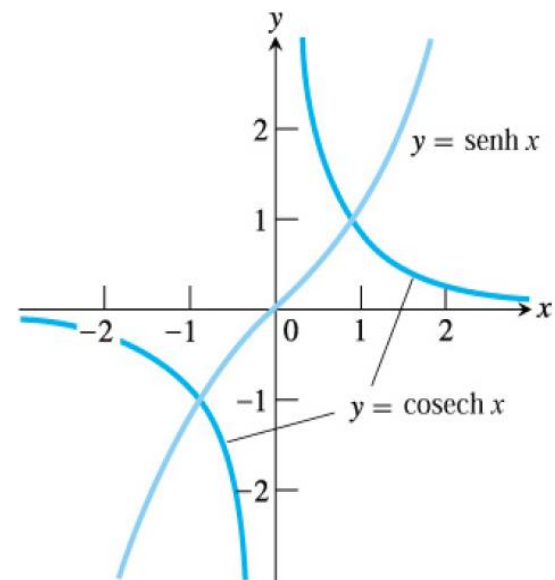
- Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



- Cossecante hiperbólica

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



APLICAÇÃO- COSSENO HIPERBÓLICO

- As combinações de funções exponenciais surgem frequentemente em diversas aplicações matemáticas e por isso merecem nomes especiais.

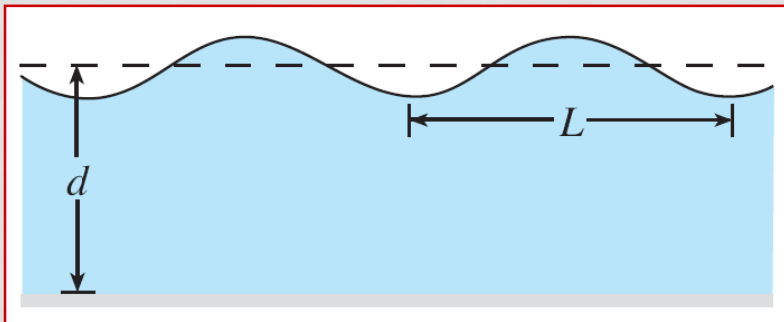


← Catenárias →



$$Y = C + ACOSH\left(\frac{X}{A}\right)$$

APLICAÇÃO- ONDAS DO MAR



$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$



Gateway Arch em St. Louis foi projeto usando-se a função do cosseno hiperbólico

DERIVADAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Tabela de Derivadas!

$$\frac{d}{dx} (\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} (\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

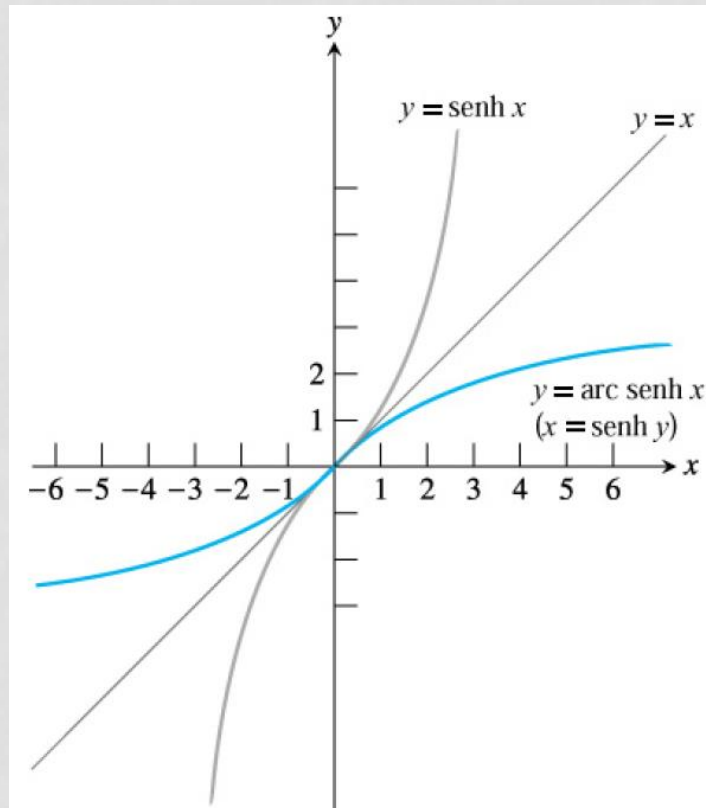
$$\frac{d}{dx} (\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

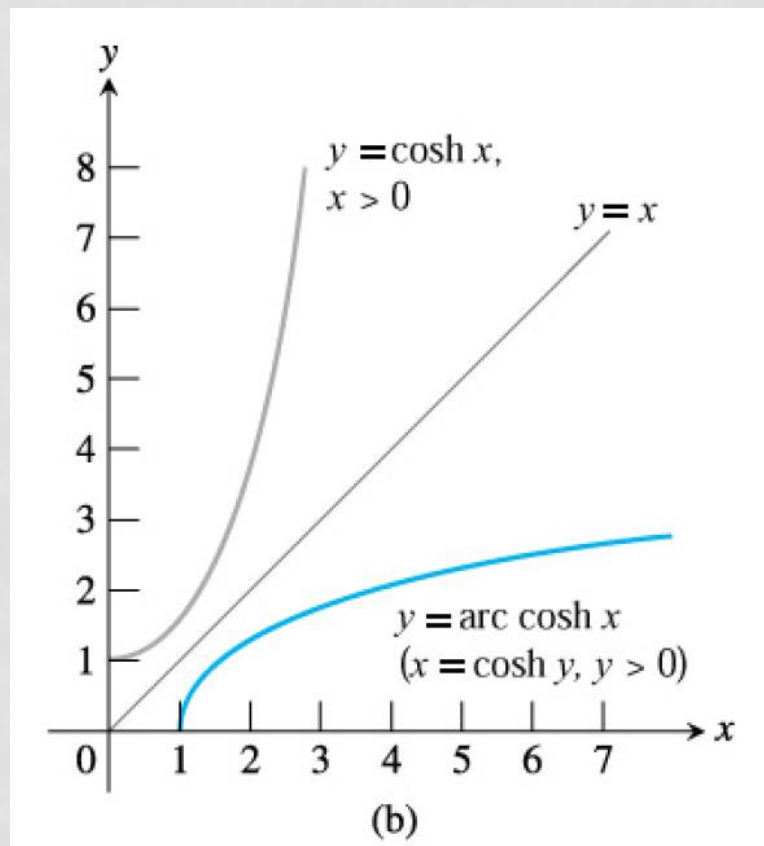
$$\frac{d}{dx} (\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x$$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

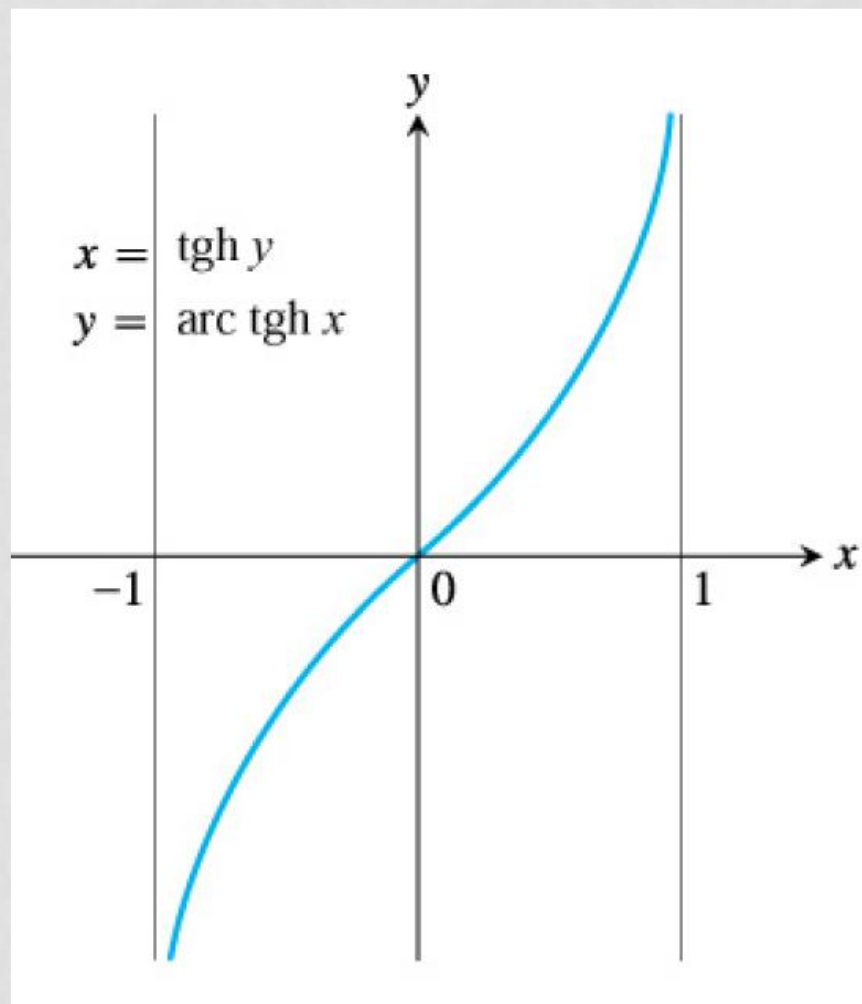
- $y = \sinh^{-1}x \iff x = \sinh y$



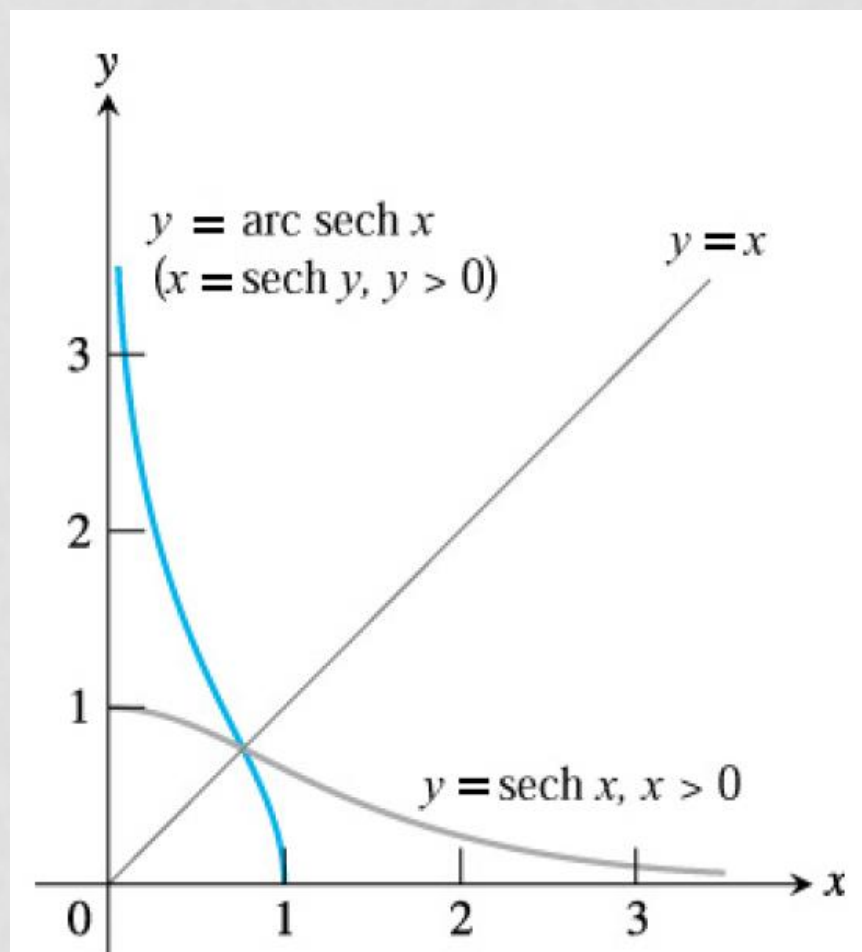
• $y = \cosh^{-1}x \iff x = \cosh y$



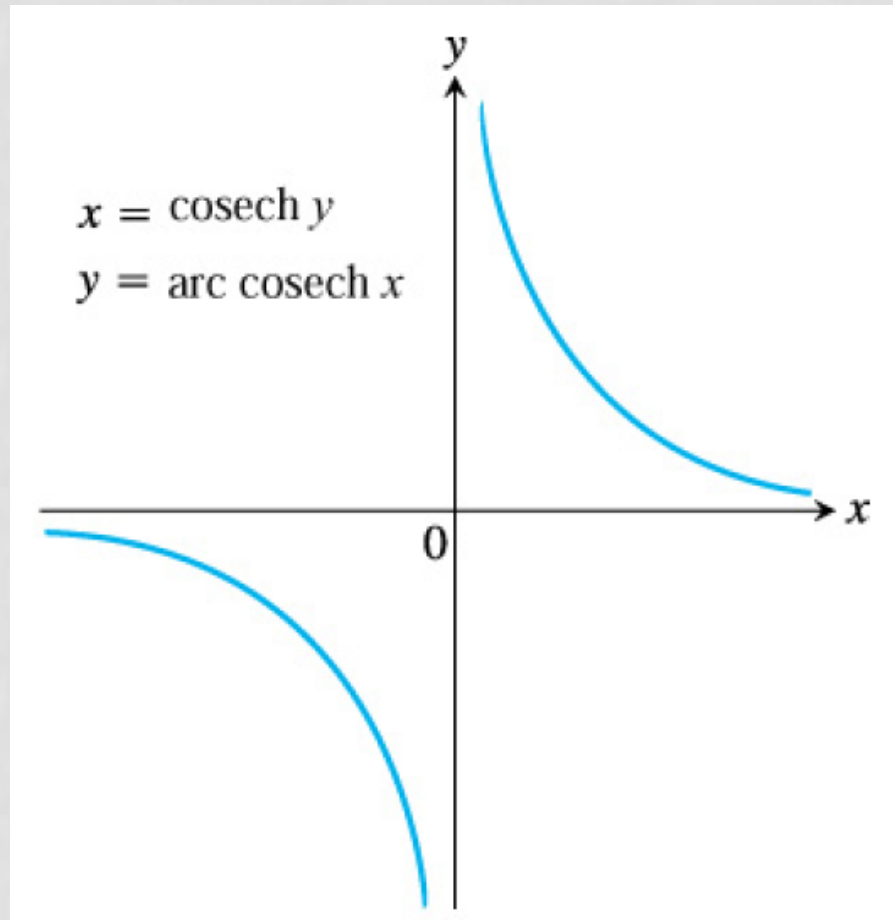
- $y = \operatorname{tgh}^{-1}x \iff x = \operatorname{tgh} y$



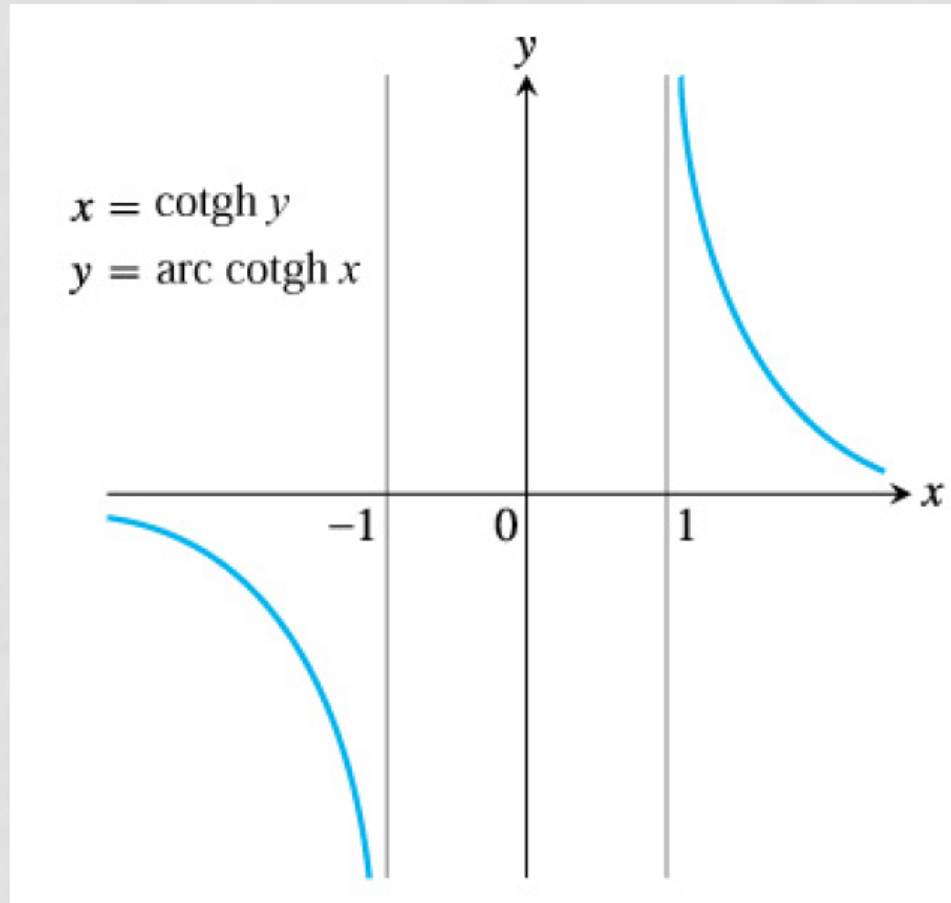
• $y = \operatorname{sech}^{-1}x \iff x = \operatorname{sech} y$



- $y = \operatorname{cosech}^{-1}x \iff x = \operatorname{cosech} y$



- $y = \operatorname{cotgh}^{-1}x \iff x = \operatorname{cotgh} y$



DERIVADAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSA

Tabela de Derivadas!

$$\frac{d}{dx} (\text{arc sinh } u(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{d}{dx} u(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc cosh } u(x)) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u(x) \quad u(x) > 1$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc tgh } u(x)) = \frac{1}{1-u^2} \frac{d}{dx} u(x) \quad |u(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc cossech } u(x)) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}} \frac{d}{dx} u(x) \quad u(x) \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc sech } u(x)) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u(x) \quad 0 < u(x) < 1$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc cotgh } u(x)) = \frac{1}{1-u^2} \frac{d}{dx} u(x) \quad |u(x)| > 1$$

EXERCÍCIOS

1. Usando os princípios da Física, pode ser mostrado que quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma de uma curva $y=f(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenadas é apropriadamente escolhido. Verifique que a função

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{T} x\right)$$

é uma solução dessa equação diferencial.

2. Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados a 14m, na forma da catenária

$$y = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right) - 15$$

em que x e y são medidos em metros.

- (a) Encontre a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita.
- (b) Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.

