6a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0216

1^o. semestre de 2021

1. Determine os seguintes limites, justificando:
   (a) $\lim_{x\to 1}(x+1)(2x+3)$,
   (b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x^2-2}$,
   (c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right)$,
2. Prove que $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$ não existe, mas $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.
3. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de A e suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $B \neq 0$. Demonstre, usando a definição que $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}$. O que ocorre se $B = 0$?
4. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de A.
   (a) Se não existem os limites de $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, podem existir os limites $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ ou $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?
   (b) Se existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$, deve existir $\lim_{x\to a} g(x)$?
   (c) Se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e não existe $\lim_{x\to a} g(x)$, pode existir $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$?
   (d) Se existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, deve existir $\lim_{x\to a} g(x)$?
5. Demonstre que, se $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = L$ e $b \neq 0$, então $\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x} = bL$. O que ocorre quando $b = 0$?
6. Mostre que, se $f(x) = x$ para x irracional e $f(x) = -x$ para x racional, então não existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para $a \neq 0$.

7. Seja
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \text{ é irracional,} \\ \frac{1}{q} \text{ se } x = \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível.} \end{cases}$$
Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, para todo $0 < a < 1$.

8. Seam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(A) = B$, a ponto de acumulação de A e $b \in B$ ponto de acumulação de B. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) - c$, prove que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, desde que $f(x) \neq b$. para $x \neq a$. Dẽ um exemplo mostrando que esta última condição é necessária.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Mostre que existem sequência s$x_n \in \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ tais que

   (a) $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) == \infty$,

   (b) $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.