

2.6 - Teste do sinal

1

Dados:

Os dados consistem em observações de uma amostra aleatória bivariada (X_1, Y_1) (X_2, Y_2) ... (X_n, Y_n) , isto é, uma amostra de n observações pareadas.

Para cada par associar um sinal:

- + se $X_i < Y_i$
- se $X_i > Y_i$
- 0 se $X_i = Y_i$ (empate)

Suposições:

- 1 - As v.a. bivariadas (X_i, Y_i) $i=1, 2, \dots, n$ são independentes
- 2 - A escala de medidas é pelo menos ordinal. (Para que possamos comparar X e Y)
- 3 - Se $P(+)>P(-)$ para um par (X_i, Y_i) , o mesmo deve ocorrer para todos os pares.

a) Teste Bicaudal

$$H_0: P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

$$H_a: P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i) \text{ ou } P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

Seja

$$n' = n - \text{n.º de empates} \\ (\text{sinal zero})$$

$$P(X_i < Y_i) = P(+), \quad P(X_i > Y_i) = P(-)$$

$$H_0: P(+) = P(-)$$

Como estamos desprezando os empates, H_0 é equivalente a:

$$P(+) = \frac{1}{2} \quad \text{ou seja, } H_0: p = \frac{1}{2}$$

amostra de n' obs.

$$T = \text{n.º total de } + \text{'s} \quad \text{sob } H_0, \quad T \sim B(n', \frac{1}{2})$$

$$RC = \{0, \dots, t, n-t, \dots, n\}, \text{ onde}$$

$$P(Y \leq t) = \frac{\alpha}{2}, \quad Y \sim B(n', \frac{1}{2})$$

b) Teste Unicaudal

$$H_0: P(X_i < Y_i) \leq P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

$$H_a: P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

$$H_0: P(+) \leq \frac{1}{2}$$

$$H_a: P(+) > \frac{1}{2}$$

Estatística: T

$$RC = \{t_2, \dots, n\}$$

$$P(Y \geq t_2) = \alpha \quad Y \sim B(n', 1/2)$$

c) Teste Unicaudal

$$H_0: P(X_i < Y_i) \geq P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

$$H_a: P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i) \quad \text{para todo } i$$

$$H_0: P(+) \geq \frac{1}{2}$$

$$H_a: P(+) < \frac{1}{2}$$

Estatística: T

$$RC = \{0, 1, \dots, t_1\}$$

$$P(Y \leq t_1) = \alpha \quad Y \sim B(n', 1/2)$$

Para $n > 30$, usar a aprox. normal.

Exemplo

A e B são dois artigos com a mesma função, A é produzido pelo método antigo e B por um novo método. O fabricante deseja saber se esse novo tipo de processo de fabricação faz com que as pessoas tenham preferência por B. Selecionou-se uma amostra de 10 consumidores e para cada um foram dados os artigos A e B. Depois de um determinado período de tempo, perguntou-se a cada um dos consumidores qual o artigo de sua preferência. O resultado foi:

8 consumidores preferem B $\rightarrow 8 \text{ " + "}$
1 consumidor prefere A $\rightarrow 1 \text{ " - "}$
1 consumidor não tem preferência $\rightarrow \text{um 0}$

$$H_0: P(+) \leq P(-) \Leftrightarrow P(+) = p = 1/2$$

$$H_a: P(+) > P(-) \Leftrightarrow p > 1/2$$

$$n' = 9 \quad T = 8 \quad \alpha = 0,05 \quad RC = \{8, 9\}$$

$$\begin{cases} P(Y \geq 8 \mid p = 1/2) = 0,0195 \leq 0,02 \rightarrow \text{p-valor} \\ Y \sim B(9, 1/2) \end{cases}$$

Rejeita-se H_0 para $\alpha \geq 0,02$.

Os dados sugerem que a probabilidade de preferência pelo método B é maior que $1/2$.

Obs:

1- O teste do sinal pode ser usado para testar

$$H_0: E(X) = E(Y) \quad \text{ou} \quad \text{Mediana}(X) = \text{Mediana}(Y)$$

$$H_a: E(X) \neq E(Y)$$

para dados emparelhados, no entanto, se $Y_i - X_i$ são v. a. independentes com distribuições normal, o teste t para amostras pareadas é mais apropriado.

2- Se pudermos assumir que $Y_i - X_i$ são v. a. com função distribuição simétrica $[P(Z \leq c-x) = P(Z \geq c+x) \forall x]$, o teste de Wilcoxon para observações pareadas é mais indicado

Teste de McNemar - Aplicações do teste do sinal

6

Os dados consistem de n' variáveis aleatórias binárias independentes (X_i, Y_i) $i=1, 2, \dots, n'$, a escala de medidas para X_i e Y_i é nominal com duas categorias denotadas por 0 e 1. Assim, os possíveis valores de (X_i, Y_i) são $(0,0)$ $(0,1)$ $(1,0)$ $(1,1)$. Os dados podem ser resumidos numa tabela de dupla entrada

		Classificação de Y_i	
		$Y_i=0$	$Y_i=1$
Classificação de X_i	$X_i=0$	n.º de pares com $X_i=0$ e $Y_i=0$ a	n.º de pares com $X_i=0$ e $Y_i=1$ b
	$X_i=1$	n.º de pares com $X_i=1$ e $Y_i=0$ c	n.º de pares com $X_i=1$ e $Y_i=1$ d

Suposições:

- 1) Os pares (X_i, Y_i) são independentes.
- 2) A escala é nominal com duas categorias as mesmas para X_i e Y_i
- 3) A diferença $P(X_i=0, Y_i=1) - P(X_i=1, Y_i=0)$ é negativa para todo i , ou zero para todo i ou positiva para todo i .

Hipóteses

7

$$H_0: P(X_i=0, Y_i=1) = P(X_i=1, Y_i=0) \quad \forall i$$

$$H_a: P(X_i=0, Y_i=1) \neq P(X_i=1, Y_i=0) \quad \forall i$$

 $\Leftrightarrow$

$$H_0: P(X_i=0, Y_i=1) + P(X_i=0, Y_i=0) = P(X_i=1, Y_i=0) + P(X_i=0, Y_i=0)$$

 $\Leftrightarrow$

$$H_0: P(X_i=0) = P(Y_i=0) \quad \forall i$$

$$H_a: P(X_i=0) \neq P(Y_i=0) \quad \forall i$$

 $\Leftrightarrow$

$$H_0: P(X_i=1) = P(Y_i=1)$$

$$H_a: P(X_i=1) \neq P(Y_i=1)$$

mais fácil
interpretação

Estatística de Teste e Regra de Decisão

Seja $n = b + c$ a estatística $T_2 = b$ e

Se $n \leq 20$, usar a RC = $\{0, 1, \dots, t\}, \dots, \{n-t, \dots, n\}$

t tal que $P(W \leq t) \leq \frac{\alpha}{2}$, $W \sim B(n, 1/2)$

Se $n > 20$, usar a estatística $T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$ e rejeitar

H_0 se $T_1 \geq \chi_{1, 1-\alpha}^2 \rightarrow \chi_{1, 1-\alpha}^2$ quantil ordem $1-\alpha$ da dis. χ_1^2

Justificativa;

8

O teste é uma variação do teste do sinal onde o evento $(X=0, Y=1)$ é denominado + e $(X=1, Y=0)$ é -.

Os eventos $(X=1, Y=1)$ e $(X=0, Y=0)$ são os empates, (de modo que $n' = b+c$)
a hipótese do teste fica

$$H_0: P(+) = P(-)$$

e a RC para $n' \leq 20$ é a mesma do teste do sinal.

Para n grande, utiliza-se a aproximação da binomial pela normal, de modo que, sob H_0

$$Z = \frac{T_2 - n'(\frac{1}{2})}{\sqrt{n'(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} \approx N(0, 1)$$

$$Z = \frac{b - \frac{b+c}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{b+c}} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} \approx N(0, 1) \text{ sob } H_0$$

$$Z^2 \xrightarrow{d} \chi^2_1 \text{ sob } H_0.$$

Ex:

Intenção de voto antes e depois de um debate entre dois candidatos A e B. Entrevistou-se 100 pessoas.
Antes do debate: 84 favoráveis ao candidato A
16 favoráveis ao candidato B

Após o debate, as mesmas pessoas foram entrevistadas. Dentre as favoráveis a A, 21 mudaram de opinião e dentre as favoráveis a B, 4 se tornaram favoráveis a A. Testar a hipótese de que não houve mudança na proporção de favoráveis a cada candidato após o debate.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{favorável a B antes} \\ 0 & \text{" " A " } \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{favorável a B depois} \\ 0 & \text{" " A " } \end{cases}$$

(X_i, Y_i) opinião do i -ésimo indivíduo

X e Y são dependentes

depois antes				
		0 A	1 B	
X	0 A	63 a	21 b	84
	1 B	4 c	12 d	16
		67	33	100

$$H_0: P(X_i = 0) = P(Y_i = 0) \Leftrightarrow H_0: P(X_i = 1) = P(Y_i = 1)$$

$$n = b + c = 25 \quad T_1 = \frac{(21-4)^2}{21+4} = \frac{189}{25} \approx 7,5$$

$$\chi^2_{1,0,05} = 3,841 \quad T_1 > 3,841$$

Rejeita-se H_0 .

Os dados sugerem que a proporção populacional de favoráveis a cada candidato não é a mesma antes e depois do debate.

Obs:

Este teste também é conhecido como "teste de homogeneidade das marginais" (no caso, só para tabela 2×2). Existem extensões para tabelas $K \times K$.