12. MUDANÇAS DE COORD. ORTOGONAIS

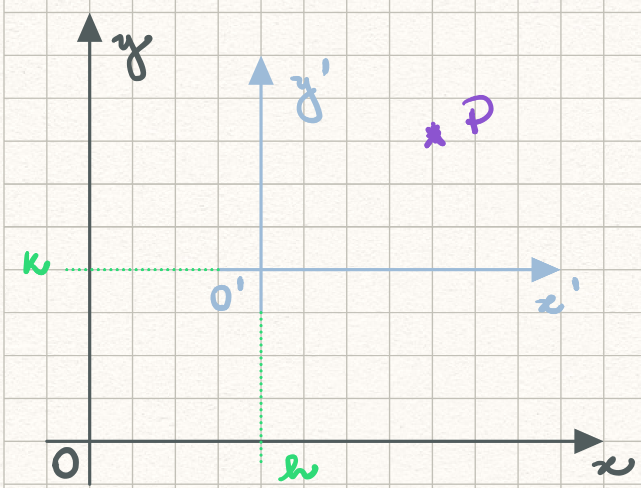
18/06/2021

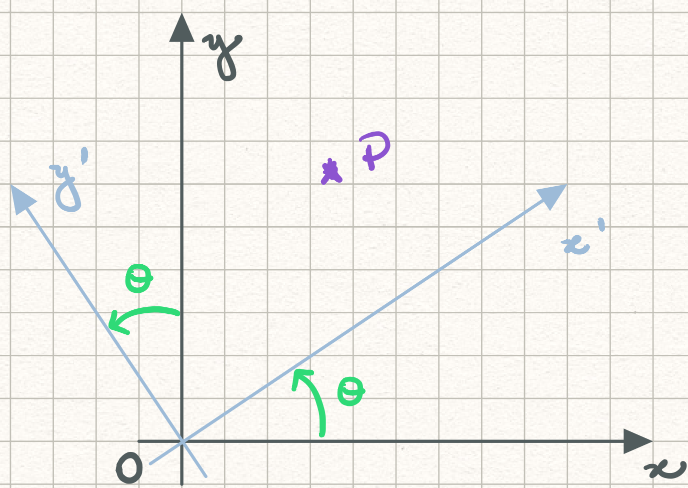
Sist. coord. plano $\begin{cases} \text{ponto: origem do sistema} \\ \text{base: 2 vetores L.I.} \end{cases}$

Sist. Ortonormais: **PLANO CARTESIANO:** $\Sigma(O, \{\vec{i}, \vec{j}\})$

Técnicas que relacionam as coord. obtidas em sistemas distintos do canônico com as do plano cartesiano:

TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO





* Altera a origem do sistema
* Novos eixos // eixos canônicos

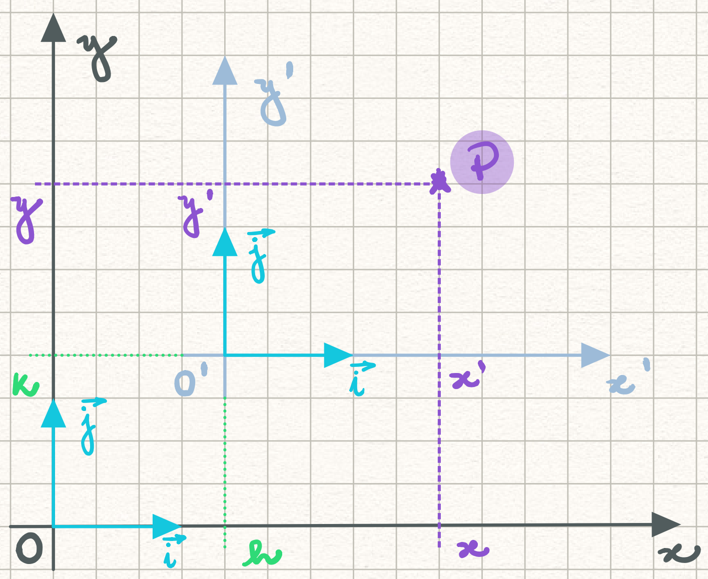
* Mantém a origem do sistema
* Novos eixos formam ângulo θ com eixos canônicos

CASO MAIS GERAL:

Ocorrem Translação e Rotação

* Deslocamento da origem do sistema
* Alteração da base ortonormal

2. TRANSLAÇÃO



Na Translação:

Mantém-se fixa a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ∴ os eixos dos sistemas são //s.

Altera-se o ponto de origem do sistema.

O lugar geométrico definido pelo ponto P se altera com a mudança de coordenadas?

NÃO

Desta forma, as coord. (x, y) devem estabelecer uma relação com as coord. (x', y').

SISTEMA CARTESIANO (Oxy)

SISTEMA TRANSLADADO (O'x'y')

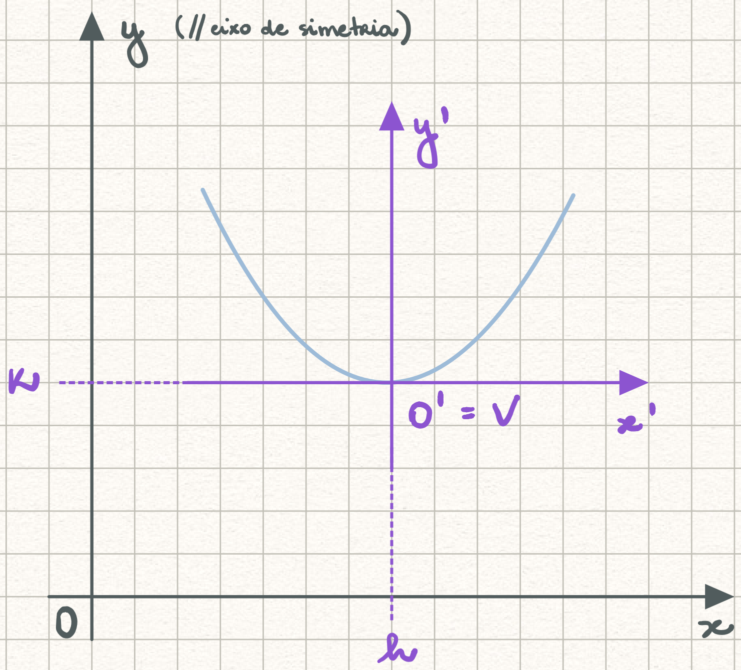
De acordo com a Figura anterior:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

APLICAÇÃO:

Encontrar as eqs. gerais das cônicas cujos V ou C não coincidem com a origem O(0,0) do sistema cartesiano.

Parábola cujo eixo // Oy



Eq. reduzida da parábola (obtida no sistema O'x'y'):

$$(x')^2 = 4py'$$

$\downarrow$

É possível resolver o problema do Lugar Geométrico a partir dessa equação? **NÃO**

Aplicando a Mudança de Coord. de Translação: $\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - K \end{cases}$

$$(x-h)^2 = 4p(y-K)$$

Analogamente, para a **Parábola cujo eixo // Ox**

$$(y')^2 = 4px'$$

$\downarrow$ Mudança de Coord. Translação

$$(y-K)^2 = 4p(x-h)$$

Slide 08 - Eq. Parábola na forma explícita

Eq. geral da parábola com eixo // Oy : $(x-h)^2 = 4p(y-K)$

Desenvolvendo a equação:

$$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pK$$

$$4py = x^2 - 2hx + h^2 + 4pK$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + \left(K + \frac{h^2}{4p}\right)$$

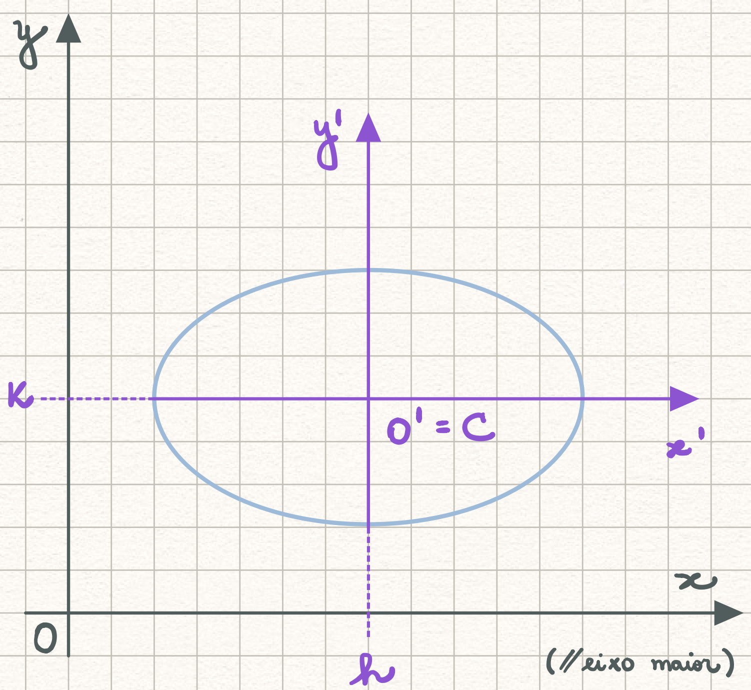
$\therefore\ y = ax^2 + bx + c$ Eq. Explícita da Parábola

$a = \frac{1}{4p}$ $\therefore$ a (ou p) define a concavidade da parábola.

Analogamente, para a parábola com eixo // Ox, a eq. explícita é:

$$x = ay^2 + by + c$$

Elipse cujo eixo maior // Ox



Eq. reduzida da elipse (obtida no sistema O'x'y'):

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Mudança de Coord.

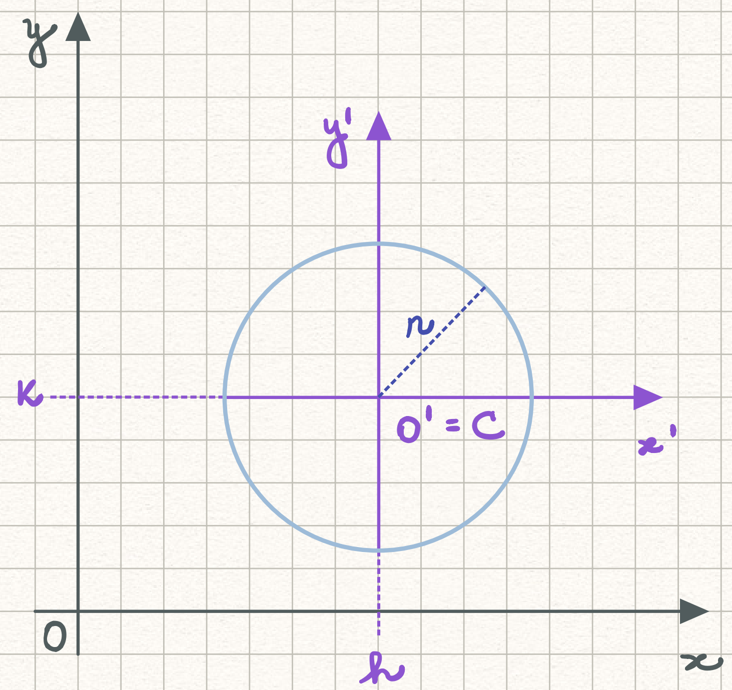
Translação

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-K)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, para a Elipse cujo eixo maior // Oy:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

OBSERVAÇÃO: circunferência



Eq. reduzida da circunferência:

(obtida no sistema O'x'y'):

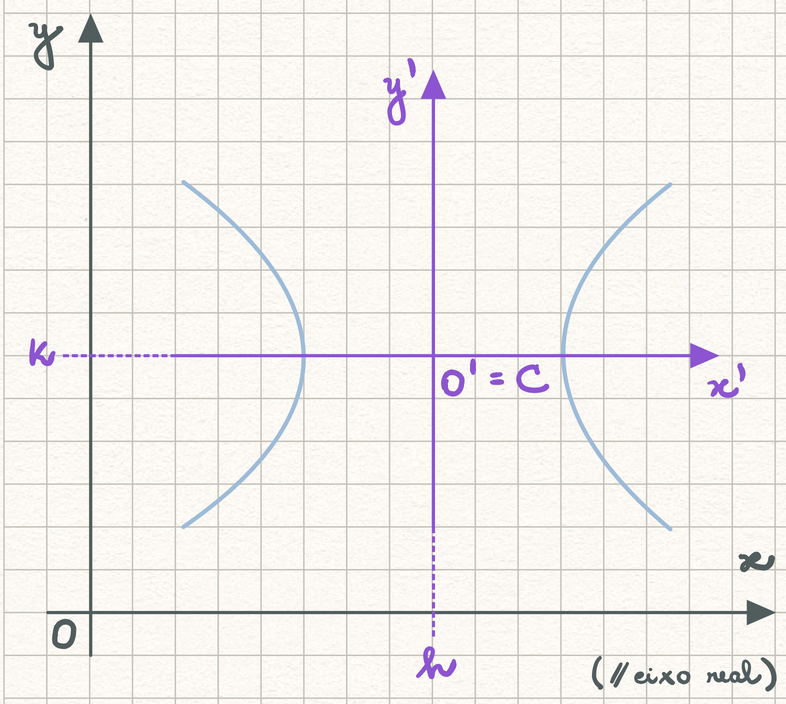
$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

$\downarrow$ Mudança de Coord.

Translação

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Hipérbole cujo eixo real // Ox



Eq. reduzida da hipérbole

(obtida no sistema O'x'y'):

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

$\downarrow$ Mudança de Coord.

Translação

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, para a Hipérbole cujo eixo real // Oy:

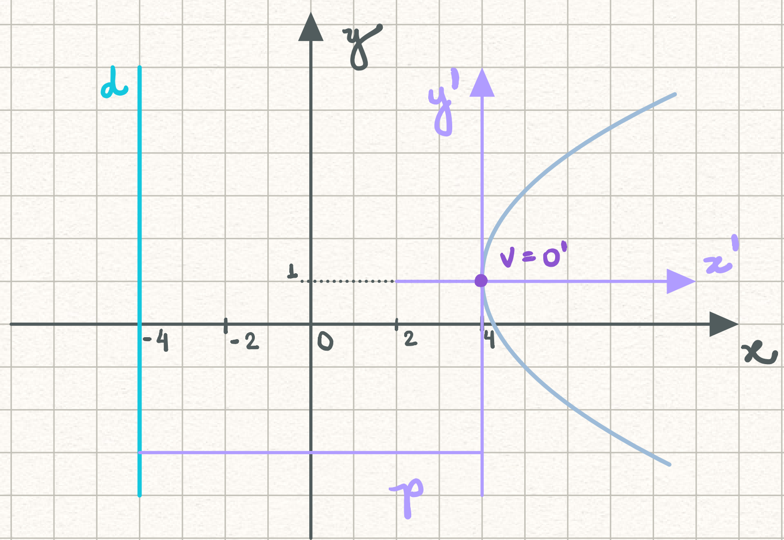
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Slides 16 e 17 - EXERCÍCIOS

1 $V(4,1)$

Eq. explícita parábola?

$d: x + 4 = 0$ ou $x = -4$



Como $d \cap$ parábola $= \phi$, eixo simetria // Ox e concavidade (+).

$p > 0$

$O' = V(4,1)$ $\begin{cases} h = 4 \\ k = 1 \end{cases}$

No sistema $O'x'y'$: $(y')^2 = 4px'$

Do gráfico: $|p| = 8$ e como $p > 0$ $\therefore$ $p = 8$

Logo: $(y')^2 = 32x'$

E, após a mudança de coord $\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$:

$$(y-1)^2 = 32(x-4)$$

Desenvolvendo a equação geral, chega-se à explícita:

$y^2 - 2y + 1 = 32x - 128$

$y^2 - 2y + 129 = 32x$ $\therefore$ $x = \frac{1}{32}y^2 - \frac{1}{16}y + \frac{129}{32}$

2 Eixo simetria // Oy : $(x-h)^2 = 4p(y-K)$ (1)

Passa por: $P_1(0,0)$; $P_2(1,1)$; $P_3(3,1)$

Eq. Geral e Gráfico da Parábola ?

São conhecidas as coord. (x,y) de 3 pontos $\in$ parábola, portanto, é possível montar um sistema de 3 eqs em que p, h e K são as incógnitas a serem determinadas:

$P_1 \longrightarrow (1)$: $h^2 = -4pK$ (i)

$P_2 \longrightarrow (1)$: $(1-h)^2 = 4p(1-K)$ (ii)

$P_3 \longrightarrow (1)$: $(3-h)^2 = 4p(1-K)$ (iii)

(ii) = (iii): $(1-h)^2 = (3-h)^2$

$$1 - 2h + \cancel{h^2} = 9 - 6h + \cancel{h^2}$$

$$4h = 8 \quad \therefore \quad h = 2$$

$h \longrightarrow$ (i): $pK = -1$

$h \longrightarrow$ (ii): $(-1)^2 = 4p - 4pK$

$$1 = 4p - 4(-1) \quad \therefore \quad p = -\frac{3}{4}$$

CONCAV. (-)

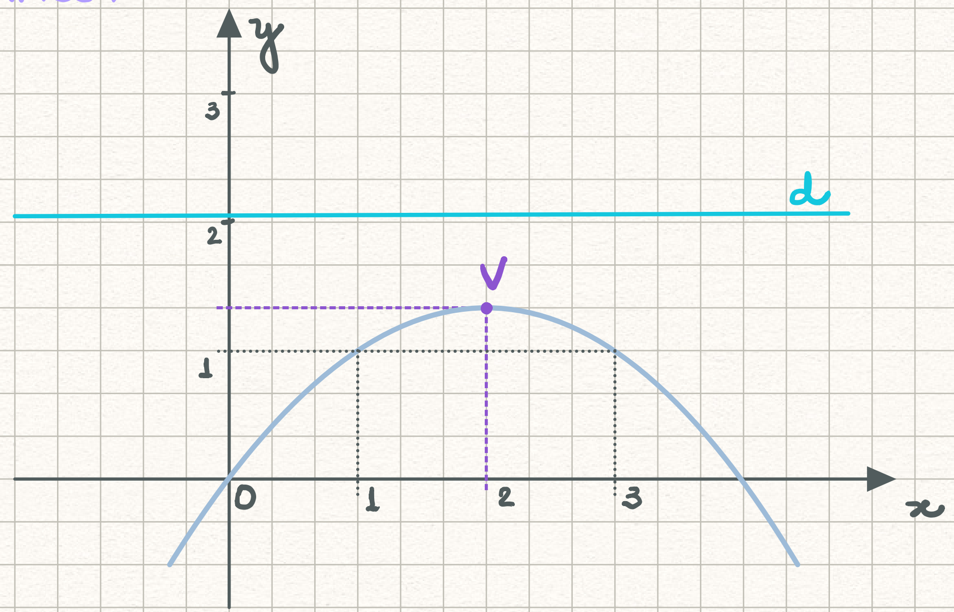
$h, p \longrightarrow$ (i): $4 = -4\left(-\frac{3}{4}\right)K \quad \therefore \quad K = \frac{4}{3}$

Substituindo p, h e K em (1):

$$(x-2)^2 = 4\left(-\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore \quad (x-2)^2 = -3\left(y-\frac{4}{3}\right)$$

GRÁFICO:



$d: x - \frac{25}{12} = 0$

3 Vértices: $A_1(1,-4)$, $A_2(1,8)$, $e = 2/3$

Cônica? Eq. Geral? Esboço?

$e = 2/3 \longrightarrow 0 < e < 1 \therefore$ ELIPSE //

$2a = |\overrightarrow{A_1A_2}|$, $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (0, 12)$

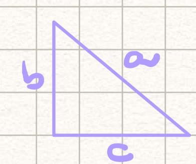
$2a = \sqrt{0 + (12)^2}$

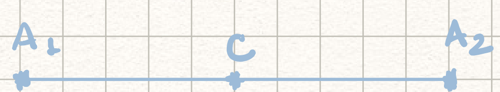
$2a = 12$, $a = 6$ //

$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \therefore \frac{c}{6} = \frac{2}{3}$, $c = 4$ //

Vale ainda a relação: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = 36 - 16$, $b = 2\sqrt{5}$ //





C: ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $C(x,y)$

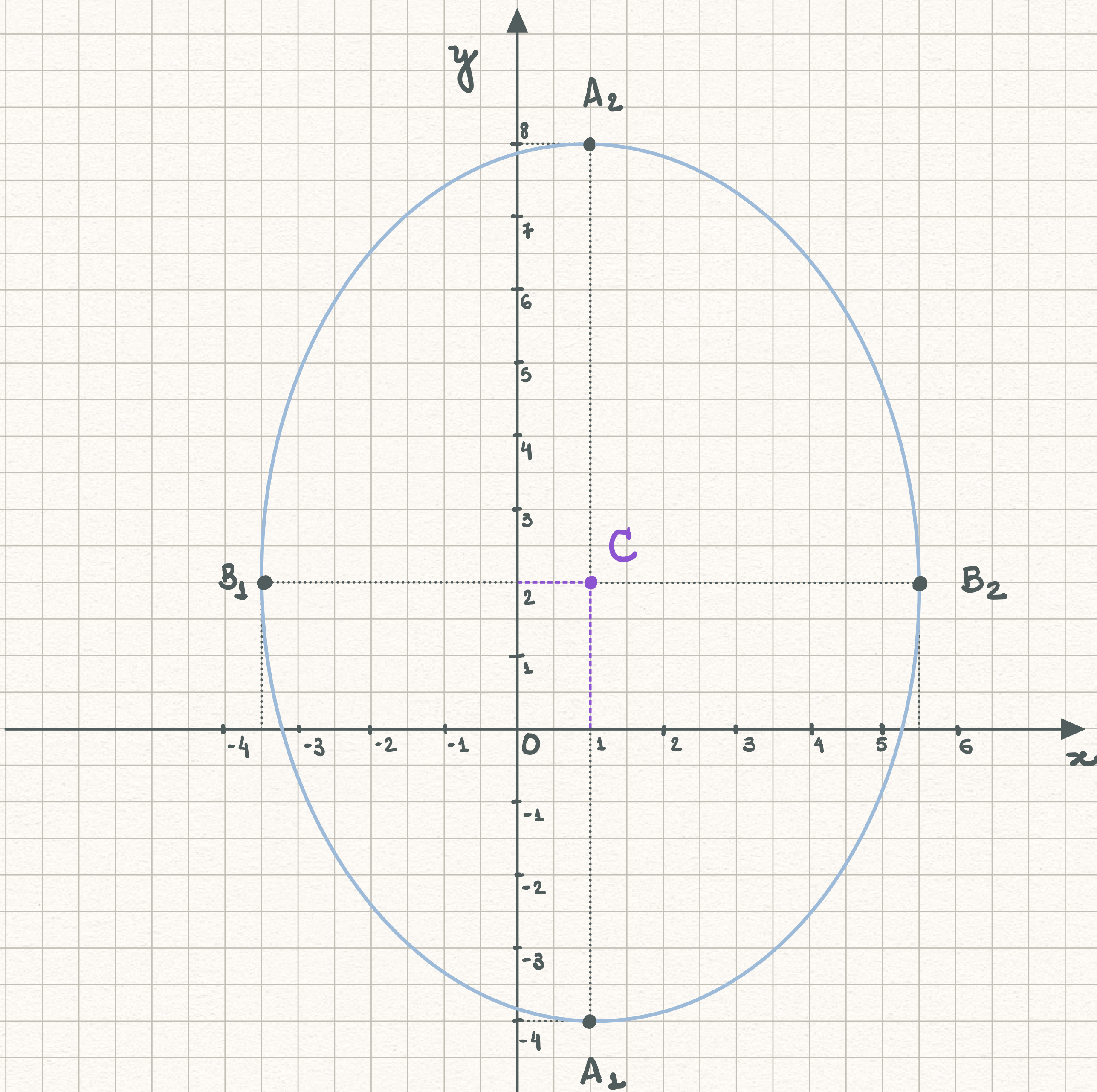
$(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = (1,2) \therefore C(1,2)$ //

C, A_1, A_2 sobre a reta // Oy tal que $x = 1$, logo o eixo maior // Oy e a eq. geral será:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

GRÁFICO:



$B_1\ (x_c - b, y_c)$: $(1 - 2\sqrt{5}, 2)$

$B_2\ (x_c + b, y_c)$: $(1 + 2\sqrt{5}, 2)$

4 Elipse: $C(-3,0)$

$F_2(-1,0)$

Tangente Oy

A_1, A_2, F_1, e

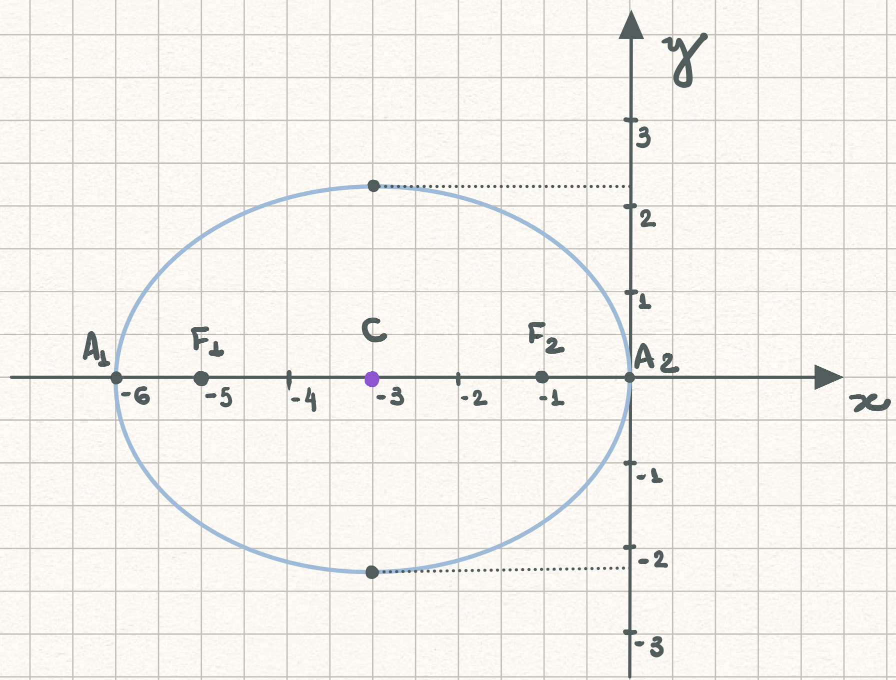
Eq. Explícita

Esboço

?

$C, F \dots$ coord. $y=0$ $\therefore$ eixo maior $/\!/ Ox$

tangente a Oy, então $A_2 = O(0,0)$, pois A_1, A_2, F_1 tem coord. $y=0$.



$c = |\overrightarrow{F_2C}|$, $\overrightarrow{F_2C} = C - F_2 = (-2,0)$ $\therefore$ $c = 2$ //

Logo:

$F_1 = (x_c - c, y_c)$: $F_1(-5,0)$ //

$a = |\overrightarrow{A_2C}|$, $\overrightarrow{A_2C} = C - A_2 = (-3,0)$ $\therefore$ $a = 3$ //

Logo:

$A_1 = (x_c - a, y_c)$: $A_1(-6,0)$ //

$e = \dfrac{c}{a}$ $\therefore$ $e = \dfrac{2}{3}$ //

$b = ?$ $a^2 = b^2 + c^2$

$9 - 4 = b^2$

$b = \sqrt{5}$

Eq. Geral: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$5(x^2+6x+9) + 9y^2 = 45$$

Eq. Explícita: $5x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

5

$F_1(-1,-5)$

$F_2(5,-5)$

hip. equilátera: $a = b$

Eq. Geral

Gráfico

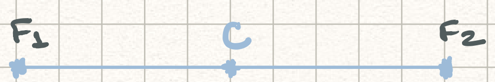
?

$2c = |\overrightarrow{F_1F_2}|$, $\overrightarrow{F_1F_2} = (6,0)$

$2c = 6$, $c = 3$

Na hipérbole, vale a relação: $c^2 = a^2 + b^2$

$$9 = 2a^2 \quad \therefore \ a = b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



C: ponto médio de $\overrightarrow{F_1F_2}$, $C(x,y)$

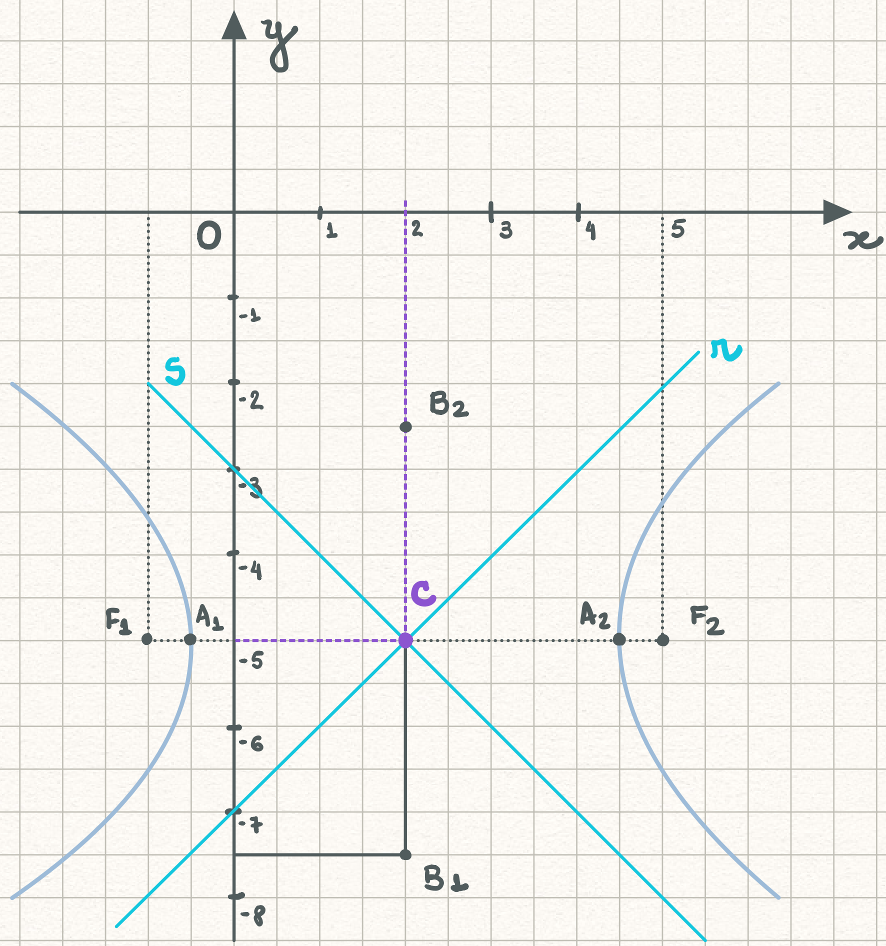
$$(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = (2,-5) \quad \therefore \ C(2,-5)$$

F_1 e F_2 sobre a reta // Ox tal que $y = -5$, logo o eixo real // Ox e a eq. geral é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{9/2} - \frac{(y+5)^2}{9/2} = 1$$

GRÁFICO :



$A_i\,(x_c \pm a,\ y_c)$

$B_i\,(x_c,\ y_c \pm b)$

6 Forma Explícita : $-25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y = 25$

Reescrevendo para obter a forma geral :

$$\underbrace{-25}_{A}x^2 + \underbrace{9}_{B}y^2 \underbrace{-50x}_{D} \underbrace{-90y}_{E} \underbrace{-25}_{F} = 0$$

A e B ... sinais contrários ... HIPÉRBOLE

$$-25(x^2+2x) + 9(y^2-10y) = 25$$

Completando os quadrados perfeitos :

$$-25(x^2+2x+1) + 9(y^2-10y+25) = \cancel{25}\ \cancel{-25} + 225$$

$$-25(x+1)^2 + 9(y-5)^2 = 225$$

De onde se tem:

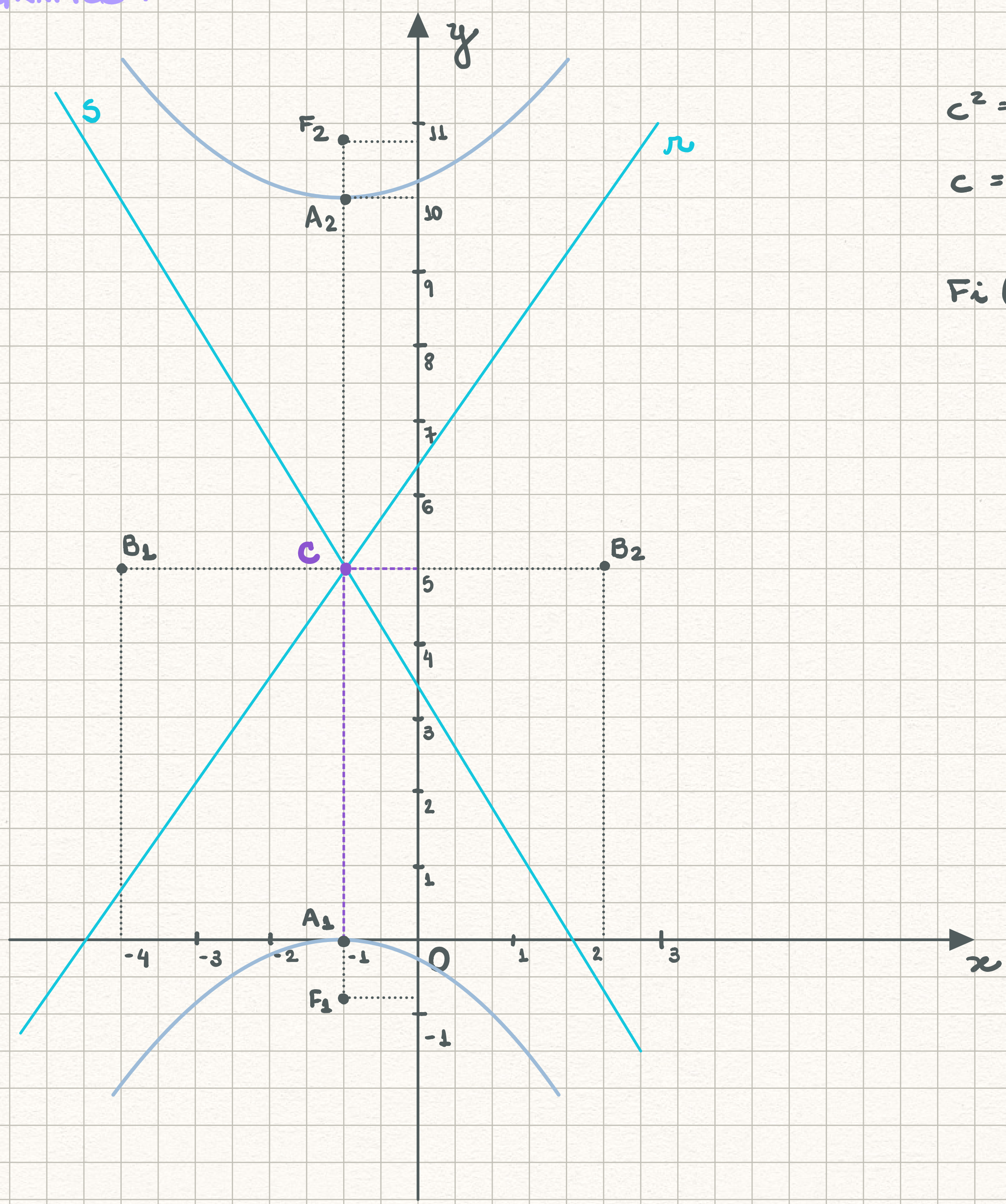
$$-\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

$$\begin{cases} C(-1,5) \\ a = 5 \,;\, b = 3 \\ \text{eixo real} \parallel Oy \end{cases}$$

E, no sist. auxiliar (transladado) $O'x'y'$:

$$-\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{25} = 1$$

GRÁFICO:



$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{34}$

$F_i\,(x_C,\, y_C \pm c)$