UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

12. Mudança de Coordenadas Ortogonais

LOB 1036 - Geometria Analítica
Profa. Paula C P M Pardal

12.1 INTRODUÇÃO

- Um sistema de coordenadas no plano é formado por:
  - Uma base (dois vetores LI) e um ponto, chamado *origem* do sistema coordenado.
    - **Sistemas ortonormais:** plano cartesiano ➔ $\sum(O, B = \{\vec{i}, \vec{j}\})$.

PROBLEMA: *Como determinar um sistema coordenado apropriado para resolver problemas geométricos?*

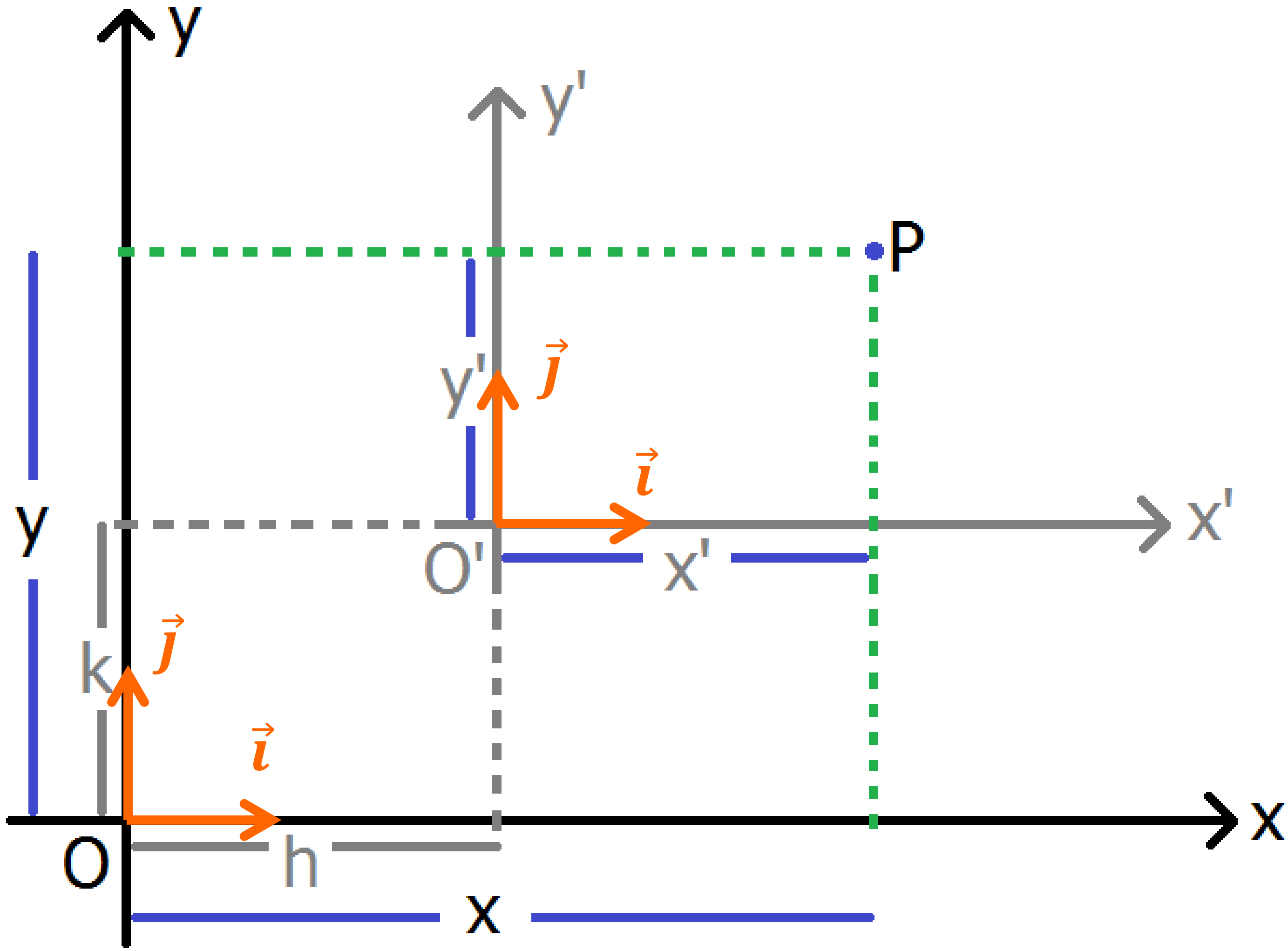
- Na sequência, serão apresentadas duas técnicas para relacionar coordenadas definidas em sistemas distintos, o que é de muita utilidade para determinar, entre outras questões geométricas, a equação geral das cônicas.

- Tais técnicas, denominadas ***mudanças de coordenadas***, são conhecidas como Translação e Rotação de Sistemas Coordenados.

12.2 TRANSLAÇÃO

- A translação é uma mudança de coordenadas entre dois sistemas no plano, $\sum_1(\mathrm{O}, \mathrm{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\})$ e $\sum_2(\mathrm{O'}, \mathrm{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\})$, em que a base permanece a mesma e a origem do sistema está em um ponto diferente de $\mathrm{O}(0,0)$.

- Considere no sistema cartesiano $\mathrm{O}xy$ um ponto arbitrário $\mathrm{O'}(h,k)$. Será introduzido um novo sistema, $\mathrm{O'}x'y'$, tal que:



y
y'
P
y'
$\vec{j}$
$\vec{i}$
x'
y
O'
x'
k
$\vec{j}$
$\vec{i}$
x
O
h
x

- Se P é um ponto qualquer que pertence ao plano, suas coordenadas serão:
  - (x, y) no sistema Oxy; e
  - (x', y') no sistema O'x'y'.
- Da figura anterior, é possível estabelecer a seguinte relação entre estas coordenadas:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Ou, vetorialmente: $(x, y) = (x', y') + (h, k)$.

- ***Aplicação da Translação:*** determinar as equações gerais das cônicas cujo centro ou vértice não coincide com a origem $O(0,0)$ do sistema cartesiano.

12.3 VÉRTICE DA PARÁBOLA FORA DA ORIGEM DO SISTEMA CARTESIANO

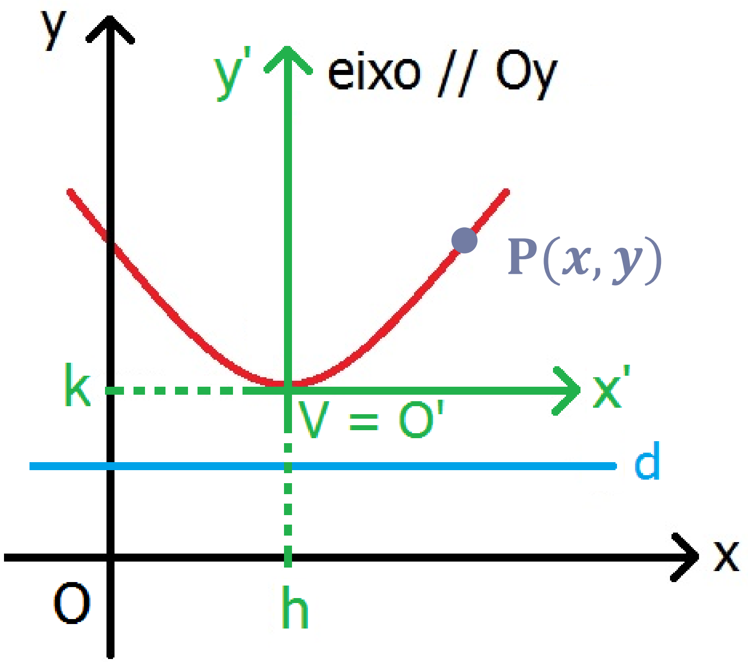
I. *O eixo da parábola é paralelo ao eixo Oy*

- Seja uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y. As coordenadas h e k de V são dadas em relação a Oxy.

- Sabe-se que no sistema O'x'y': $\boldsymbol{x'^2 = 4py'}$.

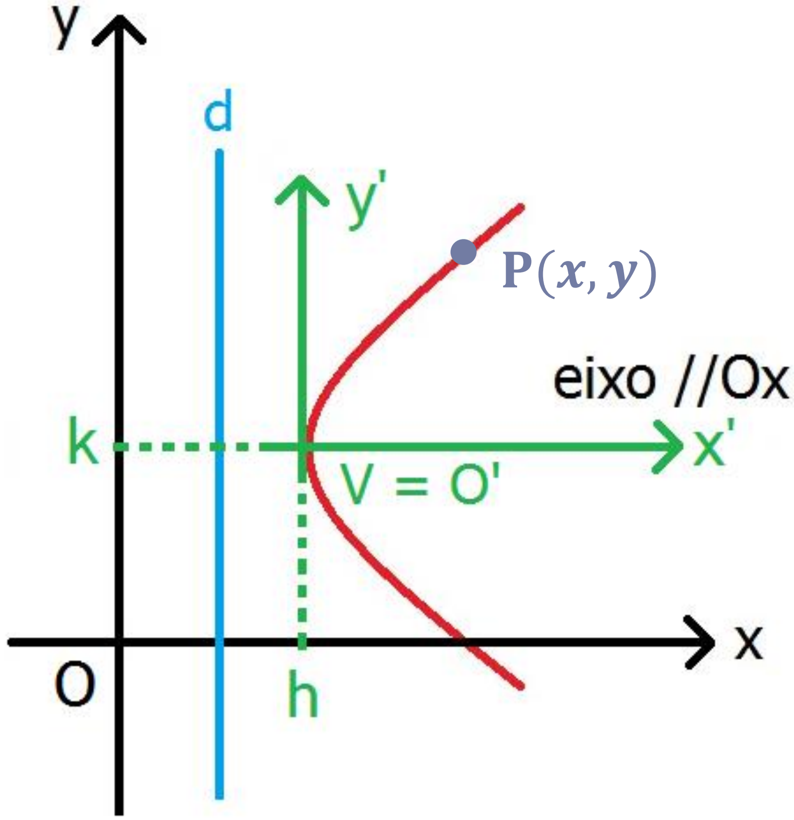
E como $x' = x - h$; $y' = y - k$, tem-se:

$$\therefore\ \boldsymbol{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$



que é a ***equação geral*** da parábola de vértice $V(h,k)$ fora da origem e eixo paralelo ao eixo Oy.

II. *O eixo da parábola é paralelo ao eixo Ox*



- De forma análoga:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

é a ***equação geral*** da parábola de vértice $V(h, k)$ fora da origem e eixo paralelo ao eixo Ox.

Equação da Parábola na Forma Explícita

- Uma parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo paralelo a Oy tem como equação geral:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

que pode ser apresentada sob a forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Chamada ***forma explícita*** da equação da parábola com eixo paralelo a Oy .

- Reciprocamente, dada uma equação na forma explícita, é possível conduzi-la à equação geral.

Observações

a) Se a parábola tem eixo de simetria // Ox, terá a equação na forma explícita representada por $x = ay^2 + by + c$, que correspondente à equação geral $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

b) O sinal do coeficiente a na forma explícita é o mesmo de p e, portanto, indica a concavidade da parábola.

12.4 CENTRO DA ELIPSE FORA DA ORIGEM DO SISTEMA CARTESIANO

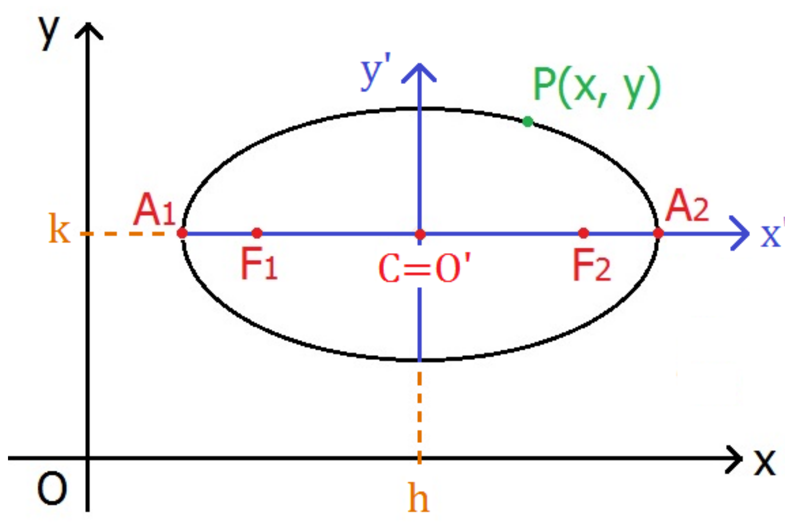
I. *O eixo maior da elipse é paralelo a Ox*

- Considere uma elipse de centro $C(h,k)$ e um ponto P(x,y) qualquer da elipse.

- Se $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ é a eq. da elipse no sistema O'x'y', então:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

É a ***equação geral*** da elipse de centro $C(h,k)$ fora da origem e eixo maior paralelo a Ox.

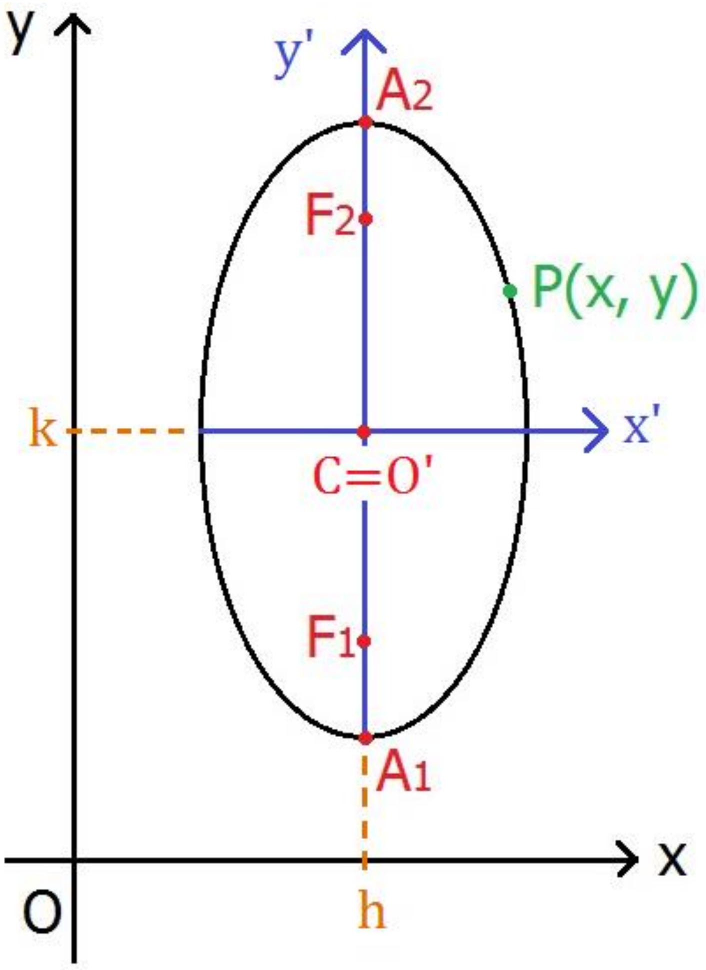


II. *O eixo maior da elipse é paralelo a Oy*

- Analogamente ao caso anterior:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

é a ***equação geral*** da elipse de centro $C(h,k)$ fora da origem e eixo maior paralelo a Oy.

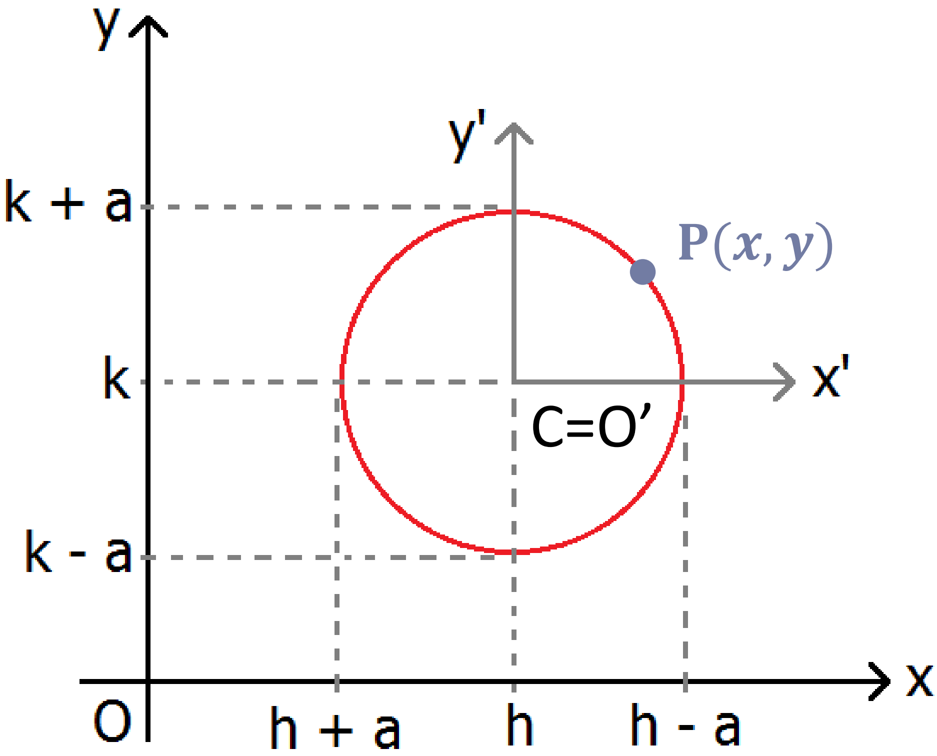


Observação

No caso em que $a = b$ e o centro está em $C(h, k)$, a equação da elipse pode ser reescrita como:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{a}^2$$

que representa a ***equação geral*** de uma circunferência de raio a e centro $C(h, k)$ fora da origem do sistema.



12.5 CENTRO DA HIPÉRBOLE FORA DA ORIGEM DO SISTEMA CARTESIANO

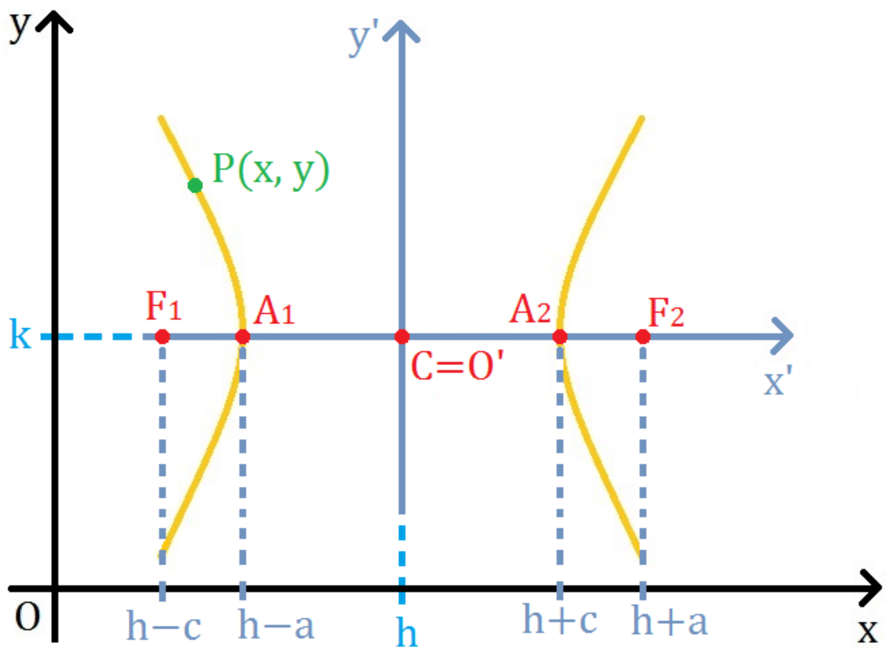
I. *O eixo real da hipérbole é paralelo a Ox*

- Considere uma hipérbole de centro $C(h, k)$ e um ponto P(x, y) qualquer da hipérbole.

- Se $\frac{x\prime^2}{a^2} - \frac{y\prime^2}{b^2} = 1$ é a eq. da hipérbole no sistema O'x'y', então:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

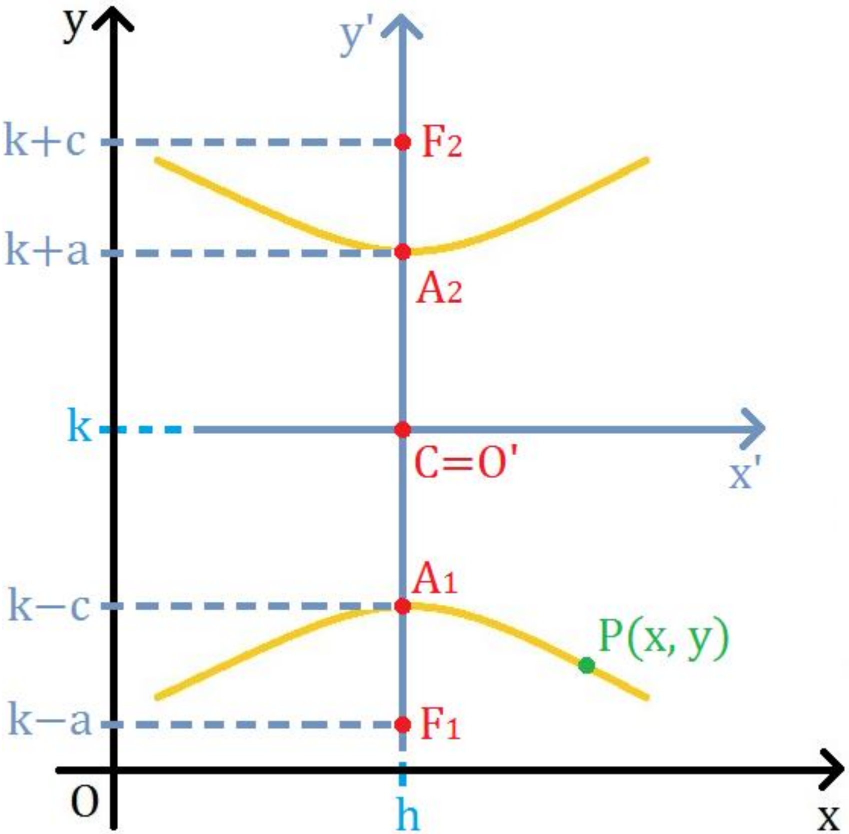
é a ***equação geral*** da hipérbole de centro $C(h, k)$ fora da origem e eixo real paralelo a Ox.



II. *O eixo real da hipérbole é paralelo a Oy*

- De forma análoga:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



é a ***equação geral*** da hipérbole de centro $C(h,k)$ fora da origem e eixo real paralelo a Oy.

Observação

- Qualquer cônica cujos eixos estejam sobre os eixos coordenados, ou sejam paralelos a eles, pode ser representada na forma explícita como:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- A ou B ***é nulo*** $\rightarrow$ parábola.
- A e B têm ***sinais iguais*** $\rightarrow$ elipse.
- A e B têm ***sinais contrários*** $\rightarrow$ hipérbole.

EXEMPLOS: $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 1 = 0 \rightarrow$ elipse $\rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{5/2} = 1$

$x^2 - 6x - 5y - 16 = 0 \rightarrow$ parábola $\rightarrow (x-3)^2 = 5(y+5)$

EXERCÍCIOS

1. Determine a equação na forma explícita da parábola com vértice $V(4,1)$ e diretriz d: $x + 4 = 0$. Esboce o gráfico. $x = \frac{1}{32}y^2 - \frac{1}{16}y + \frac{129}{32}$

2. Encontre a equação geral da parábola cujo eixo de simetria é paralelo a Oy e passa pelos pontos $P_1(0,0)$; $P_2(1,1)$ e $P_3(3,1)$. Esboce o gráfico. $(x-2)^2 = -3\left(y - \frac{4}{3}\right)$

3. Determine a equação geral da cônica que satisfaz: vértices $A_1(1,-4)$, $A_2(1,8)$ e excentricidade $^2/_3$. Classifique-a e esboce o gráfico. elipse; equação: $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

4. Determine os vértices A_1 e A_2, o foco F_1 e a excentricidade da elipse com centro $C(-3,0)$, foco $F_2(-1,0)$ e tangente a Oy. Esboce o gráfico e encontre sua equação na forma explícita.

$A_1(-6,0)$, $A_2(0,0)$, $F_1(-5,0)$, e = $^2/_3$, equação: $5x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

5. Determine a equação geral da hipérbole que satisfaz as seguintes condições: focos $F_1\,(-1,-5)$, $F_2(5,-5)$ e hipérbole equilátera. Esboce o gráfico.

equação: $2x^2 - 2y^2 - 8x - 20y - 51 = 0$

6. Escrever a equação $-25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y = 25$ em termos das variáveis do sistema auxiliar O'x'y', classificar a cônica, determinar o centro e os elementos e representar graficamente.

hipérbole; equação: $\frac{y'^2}{25} - \frac{x'^2}{9} = 1$

12.6 FORMA QUADRÁTICA

DEFINIÇÃO: Uma forma quadrática é uma equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

em que A, B e C não são todos nulos.

- **Objetivo:** classificar as formas quadráticas.
  - Dada uma forma quadrática, determinar o ***lugar geométrico*** no plano Oxy que ela representa → ***cônica***.
- **Perguntas:**

a) É possível eliminar os termos lineares Dx e Ey das formas quadráticas?

b) É possível eliminar o termo quadrático misto Cxy das formas quadráticas?

Translação e a Forma Quadrática

- Que alterações a forma quadrática $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ sofre quando uma mudança de coordenadas associada à translação é realizada?

- De acordo com uma translação, é possível substituir x por $x' + h$ e y por $y' + k$ na forma quadrática. Desenvolvendo os quadrados e ordenando as potências de x' e y':

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + (2Ah + Ck + D)x' + (Ch + 2Bk + E)y' + Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$$

- Como o termo independente é $f(h,k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F$, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + (2Ah + Ck + D)x' + (Ch + 2Bk + E)y' + f(h,k) = 0$$

- Na equação anterior, estabelecida a partir de um sistema de coordenadas auxiliar (transladado) O'x'y', é de interesse eliminar os termos lineares em x' e y'. Isto é, procuram-se valores de h e k tais que $2Ah + Ck + D = 0$ e $Ch + 2Bk + E = 0$.

- Desta forma, h e k são solução (se existir) do seguinte sistema linear:

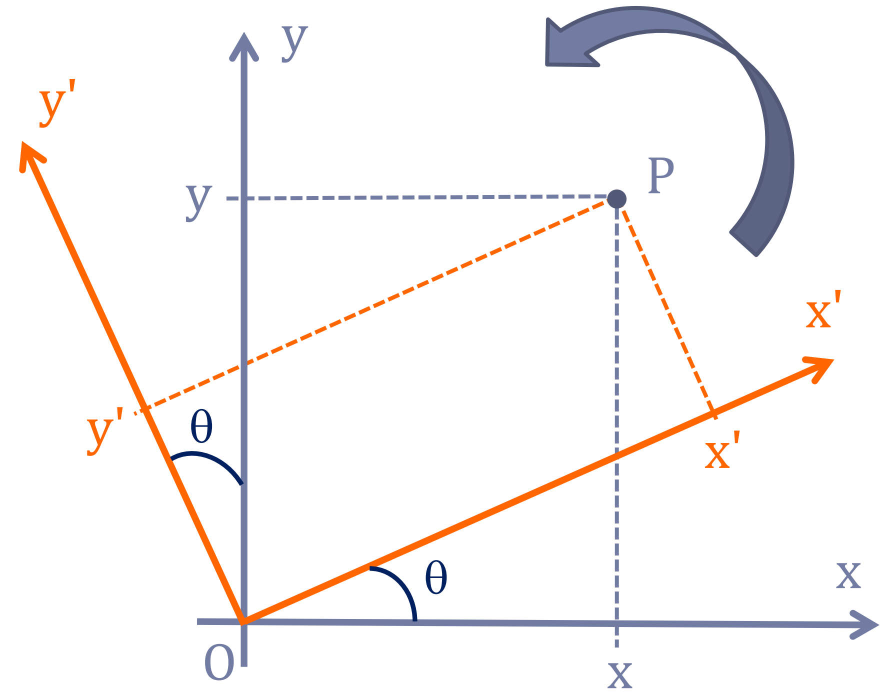
$$\begin{cases} 2Ah + Ck = -D \\ Ch + 2Bk = -E \end{cases}$$

- Se o determinante dos coeficientes das incógnitas do sistema linear anterior, $\begin{vmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{vmatrix} = 4AB - C^2$, tem valor:
  - $\neq 0$ $\rightarrow$ sistema tem única solução $\rightarrow$ h e k representam a origem do sistema transladado (termos lineares podem ser eliminados) $\rightarrow$ **Solução:** vazio, ponto, circunferência, elipse, hipérbole ou duas retas concorrentes.
  - $= 0$ $\rightarrow$ sistema tem infinitas soluções $\rightarrow$ termos lineares não podem ser eliminados por meio de translação $\rightarrow$ **Solução:** vazio, reta ou duas retas paralelas.
  - $= 0$ $\rightarrow$ sistema não tem solução $\rightarrow$ termos lineares não podem ser eliminados por meio de translação $\rightarrow$ **Solução:** vazio ou parábola.

12.7 ROTAÇÃO

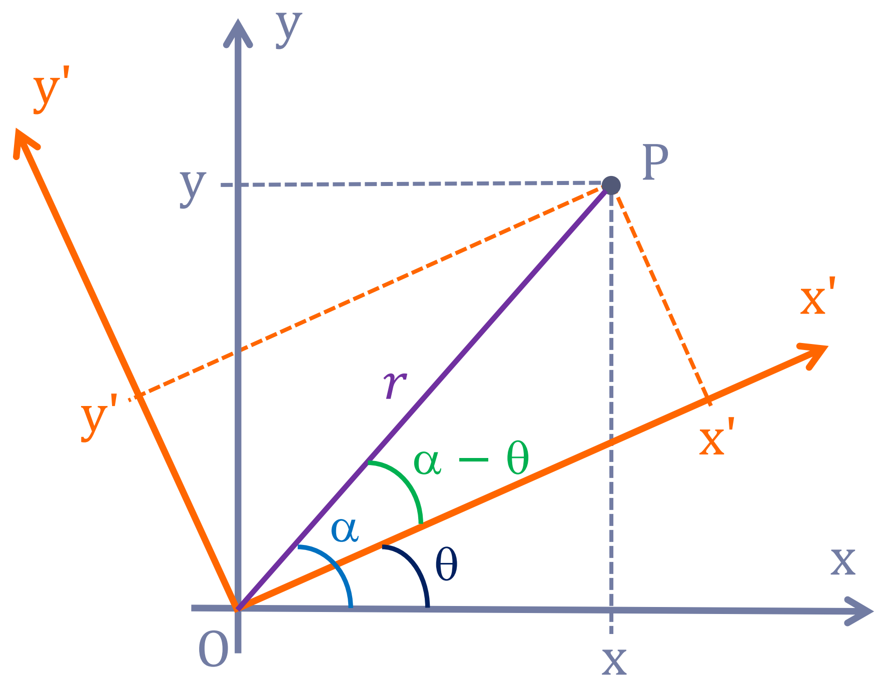
DEFINIÇÃO:

- Uma rotação é uma ***mudança de coordenadas ortogonais*** em que, a partir do sistema de coordenadas cartesiano $\sum_1(O, B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\})$, é obtido qualquer sistema $\sum_2(O, B' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\})$, por um giro de θ radianos, em sentido anti-horário.



- ***Objetivo***: obter as coordenadas (x', y') de um ponto P com coordenadas (x, y).

- Lembre-se: todo ponto P no plano cartesiano Oxy pode ser representado pela distância r do ponto até a origem do sistema e pelo ângulo α formado entre r e o eixo Ox.



Portanto, no sistema Oxy existe a relação: $\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\text{sen}\alpha \end{aligned}$

E, no sistema O$x'y'$, define-se: $\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha-\theta) \\ y' &= r\text{sen}(\alpha-\theta) \end{aligned}$, que equivale a:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha\cos\theta + r\text{sen}\alpha\text{sen}\theta \\ y' &= r\text{sen}\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\text{sen}\theta \end{aligned} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\text{sen}\theta \\ y' = -x\text{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Resolvendo o sistema nas incógnitas x e y, obtém-se:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ y = x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Rotação e a Forma Quadrática

E como esta rotação afeta a forma quadrática $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$?

Substituindo x por $x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta$, y por $x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta$ na forma quadrática e lembrando que $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$ e $\cos2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$, obtém-se:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x'y' + D'x' + E'y' + F' = 0$$

em que:

- $A' = A\cos^2\theta + B\text{sen}^2\theta + C\text{sen}\theta\cos\theta$
- $B' = A\text{sen}^2\theta + B\cos^2\theta - C\text{sen}\theta\cos\theta$
- $C' = (B - A)\text{sen}2\theta + C\cos2\theta$
- $D' = D\cos\theta + E\text{sen}\theta$
- $E' = -D\text{sen}\theta + E\cos\theta$
- $F' = F$

Deseja-se que, no sistema de coordenadas auxiliar (rotacionado) O'x'y', o termo quadrático misto desapareça. Portanto, supõe-se que este termo existe na equação do sistema Oxy, isto é, $C \neq 0$, e são procurados os valores de θ para os quais $C' = 0$. De acordo com a eq. da forma quadrática em termos de x' e y', $C' = 0$ se e somente se:

$$\text{cotg}2\theta = \frac{A - B}{C}, \qquad 0 < 2\theta < \pi$$

- Para simplificar, A' e B' são obtidos como solução do seguinte sistema:
  - $A' + B' = A + B$
  - $A' - B' = \frac{C}{\text{sen}2\theta} \quad \left(= \sqrt{C^2 + (A - B)^2}\right)$
- Se $D \neq 0$ e $E \neq 0$, é necessário calcular D' e E' através das expressões $D' = D\cos\theta + E\text{sen}\theta$ e $E' = -D\text{sen}\theta + E\cos\theta$.
- Assim, é sempre possível, por meio de uma rotação conveniente, obter uma nova equação da cônica que não contenha o termo quadrático misto.

12.8 IDENTIFICAÇÃO E ESBOÇO DA CÔNICA

- Neste ponto, é possível identificar e esboçar uma cônica, conhecendo sua equação.
  - ***Ideia*:** eliminar o termo quadrático misto utilizando uma rotação e os termos lineares, utilizando uma translação.
  - ***Estratégia*:** na primeira mudança de coordenadas, as coordenadas de um ponto no novo sistema serão dadas por (x', y'); e, se houver necessidade de uma segunda mudança, as coordenadas de um ponto nesse sistema serão dadas por (x'', y'').
- Por onde começar? Rotação ou translação?
  - Na prática, TANTO FAZ!
  - Mas, começando pela translação, evita-se o trabalho de calcular D' e E' na rotação.

EXEMPLOS

Identifique e esboce a cônica cuja forma quadrática é dada por:

1) $$4x^2 + 5y^2 + 4\sqrt{5}xy - 12\sqrt{5}x + 24y - 36 = 0$$

2) $$4x^2 + 7y^2 - 4xy + 12x + 6y - 9 = 0$$