

ESCOAMENTO INTERNO - AULA 05

Aplicação prática dos escoamentos turbulentos viscosos no interior de dutos

- Cálculo da perda de carga (perda de energia)
- Determinação:
 - Vazão do escoamento
 - Distribuição de pressão
 - Potências requeridas para vencer o atrito viscoso e singularidades: cotovelos, válvulas, mudanças de área de seção transversal e direção, etc.
- Principais equações:
 - Conservação de massa, energia e quantidade de movimento
 - Análise dimensional

Exemplos de turbulência

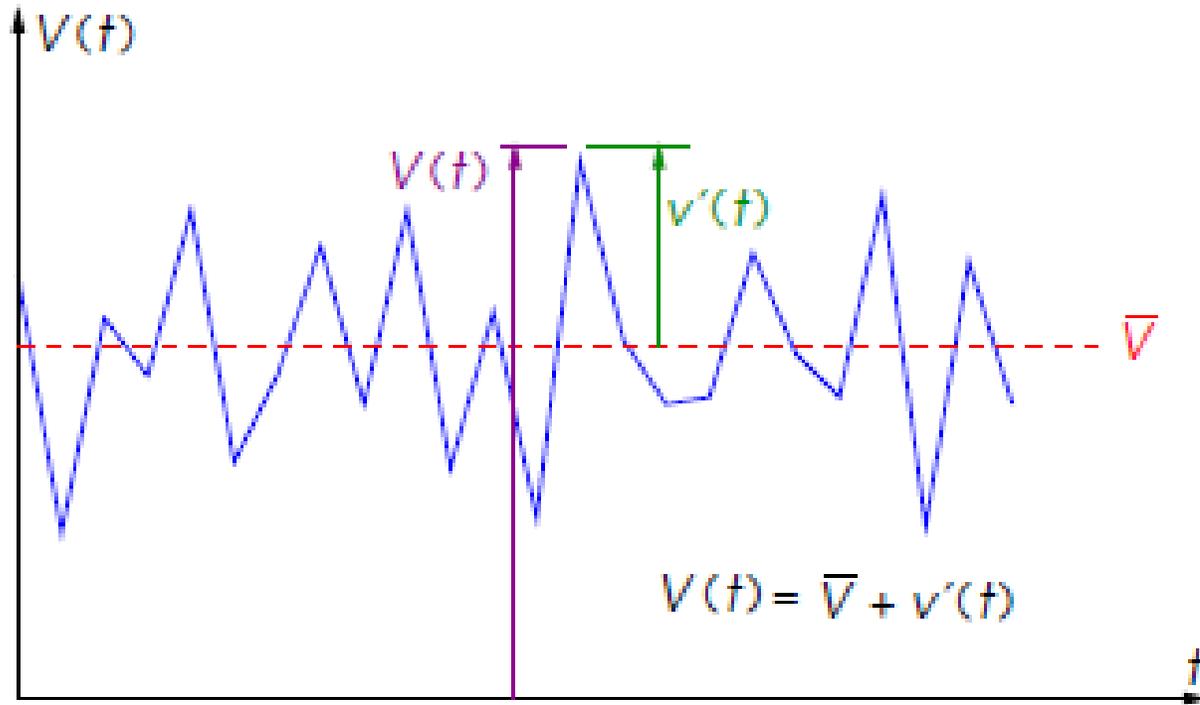


Turbulência atmosférica



Geração de vórtices

Características de escoamento turbulento



$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$$

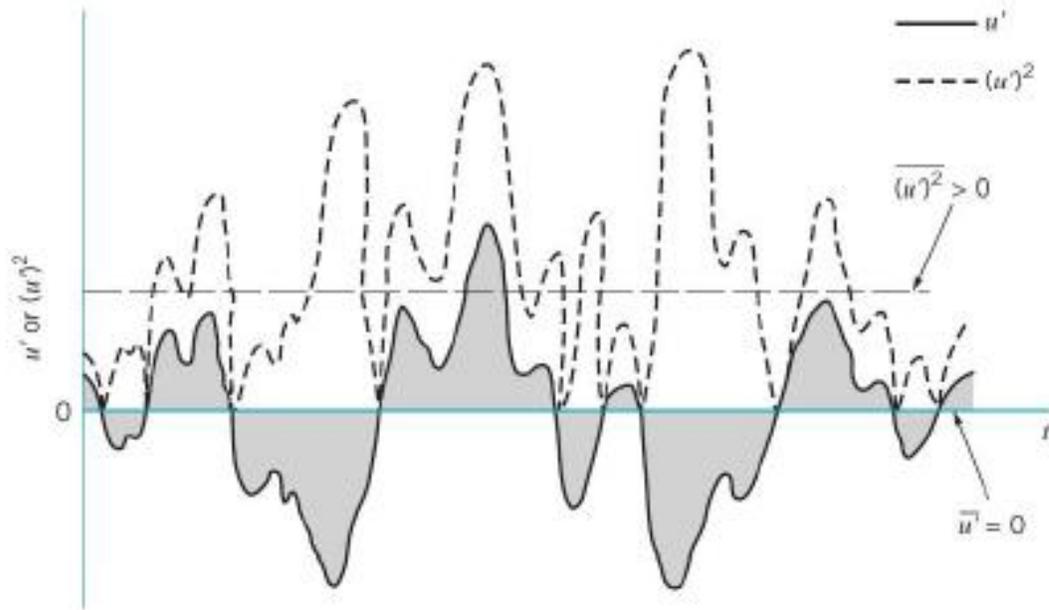
$$\rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = \text{tensão de Reynolds } (<0)$$

Regime permanente: função de média temporal

Propriedade média constante no tempo \rightarrow

Escoamento turbulento em regime permanente em média

Características de escoamento turbulento



Velocidade média: $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t) dt$

Intensidade da turbulência (I):

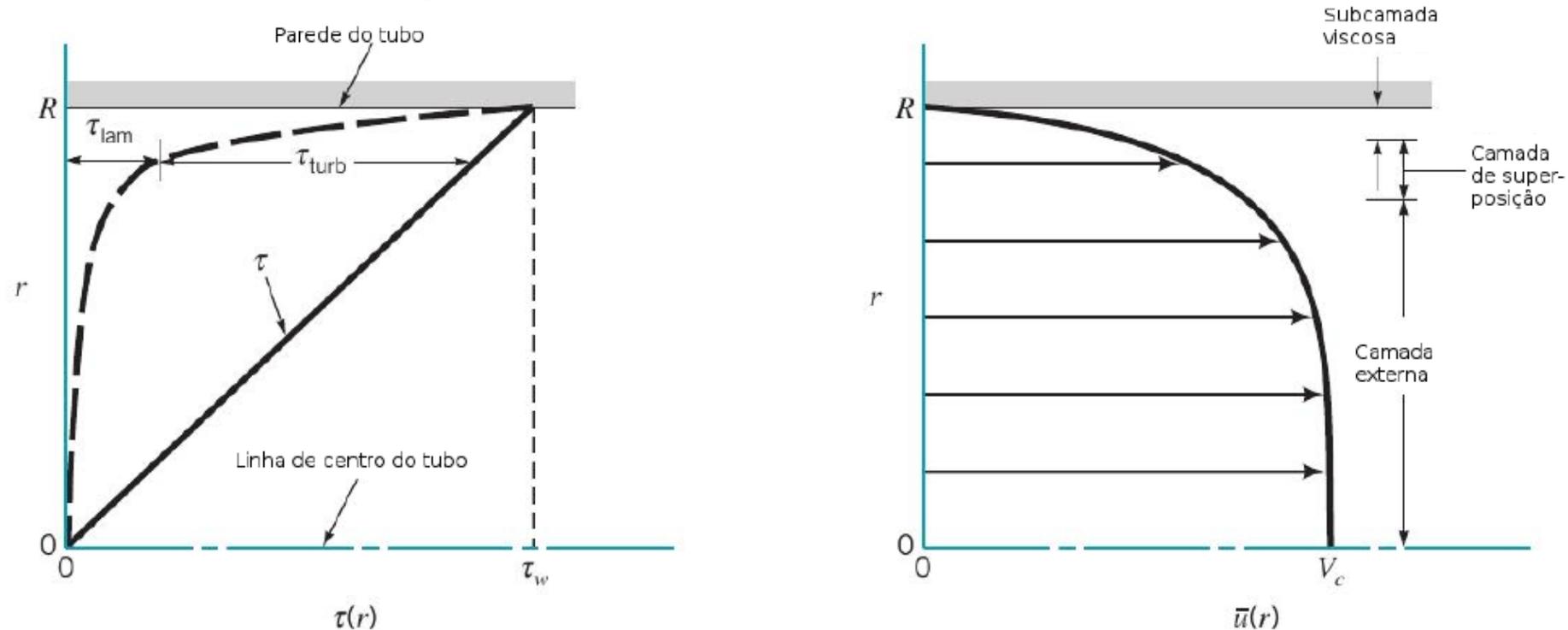
$$I = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}} = \frac{\left[\int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt \right]^{1/2}}{\bar{u}}$$

Média temporal da flutuação

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{u} dt \right) = \frac{1}{T} (T\bar{u} - T\bar{u}) = 0$$

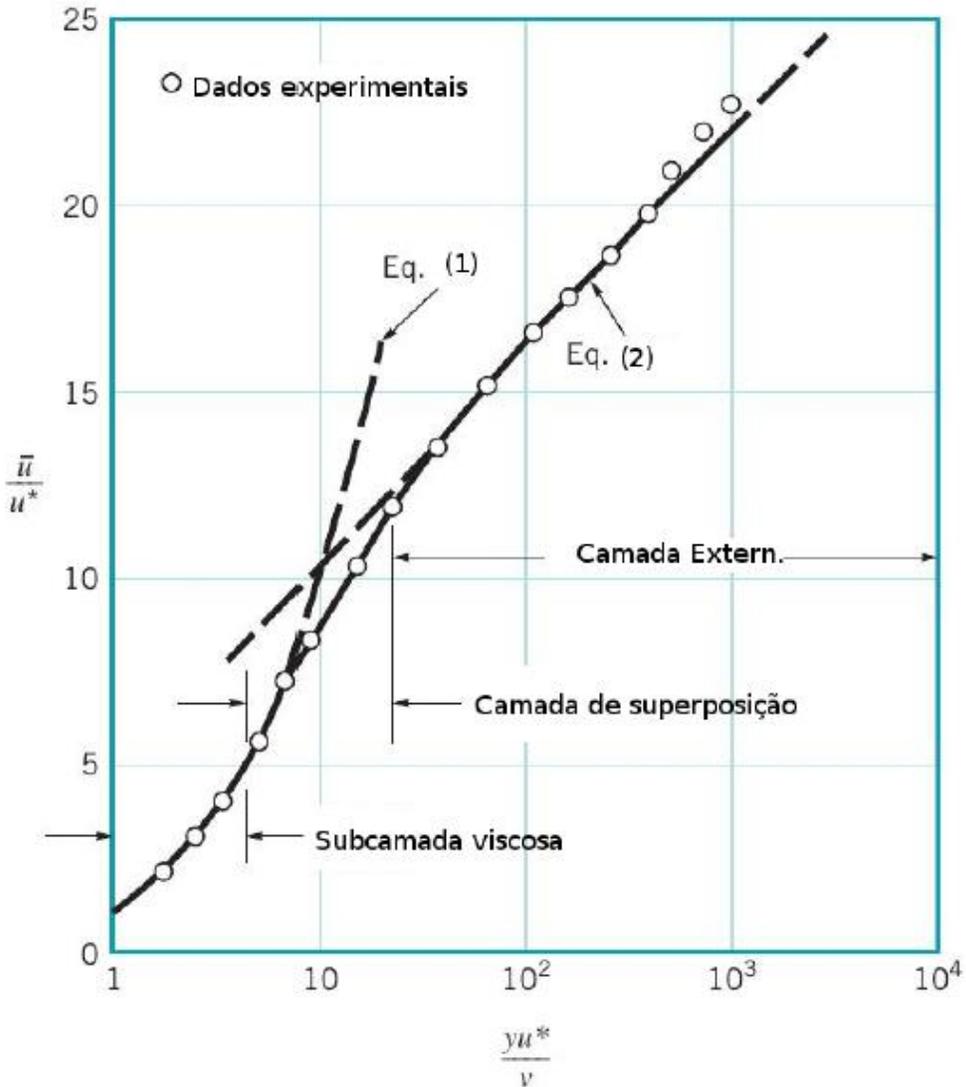
Características de escoamento turbulento

$$\tau_{turb} = (100 \text{ a } 1000)\tau_{lam}$$



“... Ainda não existe um modelo de turbulência geral e completo que descreva como varia a tensão de cisalhamento num campo de escoamento incompressível, viscoso e turbulento qualquer” [Munson]

Características de escoamento turbulento em tubos (raio=R)



Perfil de velocidade na subcamada viscosa

$$0 \leq \frac{y \cdot u^*}{\nu} \leq 5$$

$$y = R - r$$

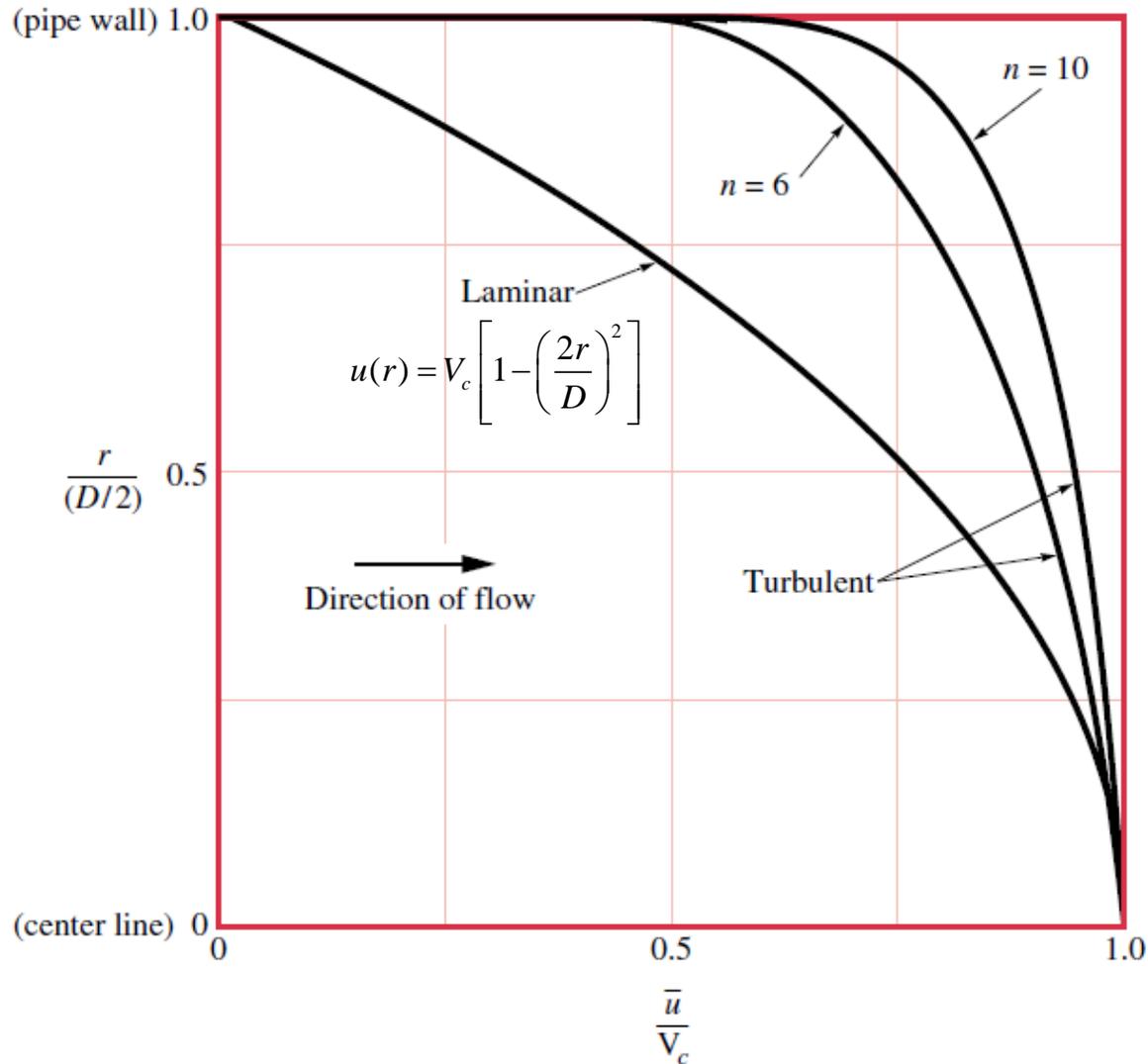
$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{y \cdot u^*}{\nu} \quad (1)$$

$$u^* = \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{1/2}$$

Perfil de velocidade na região central

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2,5 \ln \left(\frac{y \cdot u^*}{\nu} \right) + 5,0 \quad (2)$$

Características de escoamento turbulento em tubos (raio=R)



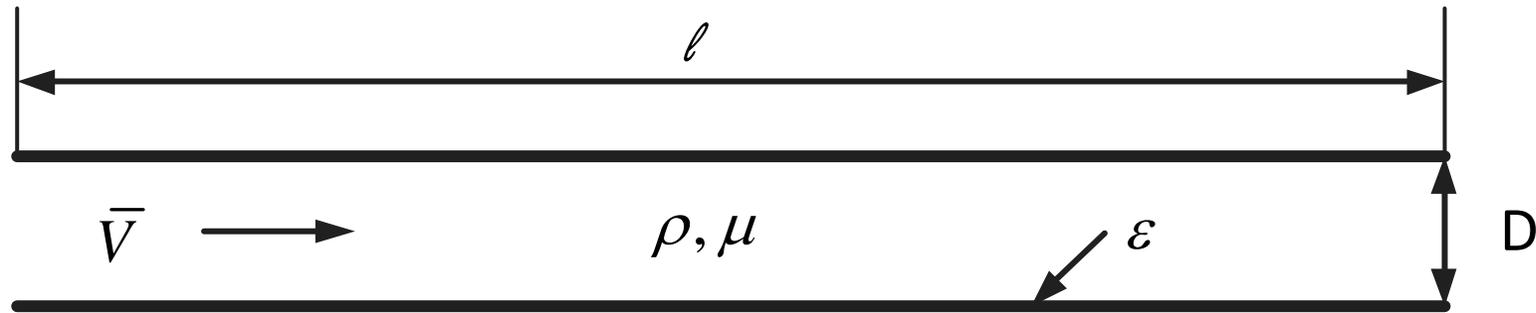
Perfil de velocidades para escoamento turbulento em tubos com parede lisa

$$\frac{\bar{V}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}$$

V_c = velocidade na linha de centro do tubo (máxima)

O valor de $n=7$ mais se aproxima do perfil real (“perfil de potência um sétimo”)

Análise dimensional de escoamento turbulento em tubos



$$\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, l, \mu, \epsilon) \quad \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = \phi_1 \left(\frac{l}{D}, \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}, \frac{\epsilon}{D} \right) = \phi_1 \left(\frac{l}{D}, Re, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

Queda de pressão proporcional a L/D \longrightarrow $\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = \frac{l}{D} \cdot \phi_2 \left(Re, \frac{\epsilon}{D} \right)$

Análise dimensional de escoamento turbulento em tubos

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}^2} = \frac{l}{D} \cdot \phi_2 \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

$$f = \phi_2 \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) = \text{fator de atrito de Darcy}$$

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h_L$$

$$\frac{\rho \cdot g \cdot h_L}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}^2} = \frac{l}{D} \cdot f$$



$$h_L = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

(Equação de Darcy- Wasbach)

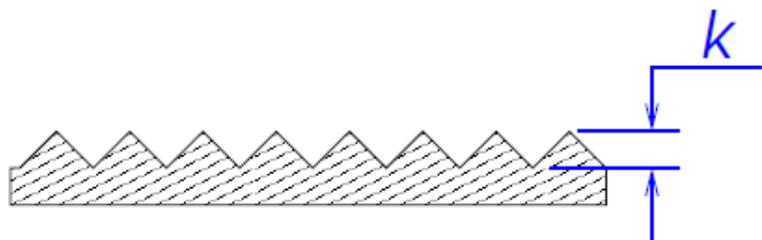
Análise dimensional de escoamento turbulento em tubos

$$h_L = \text{perda de carga total} \left\{ \begin{array}{l} h_d = \text{perda de carga distribuída (trechos retos de tubos)} \\ h_s = \text{perda de carga singular (singularidades: válvulas, conexões, etc.)} \end{array} \right.$$

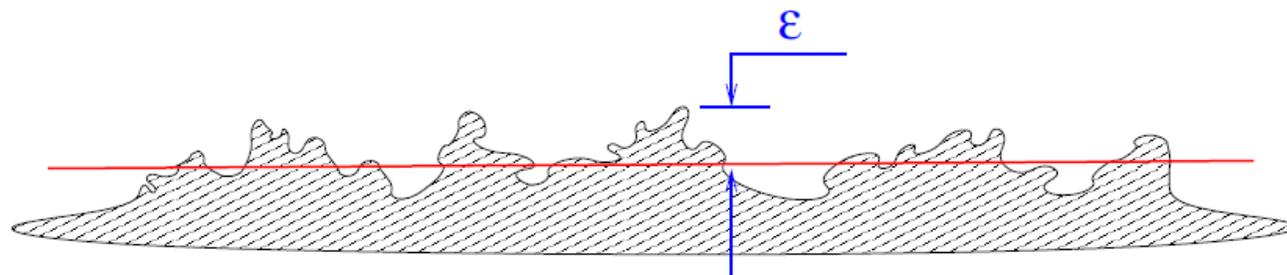
$$h_L = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g} = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

Perda de carga distribuída

Perda associada às protuberâncias e reentrâncias das superfícies



k = rugosidade uniforme [mm ou m]



ϵ = rugosidade absoluta [mm ou m]

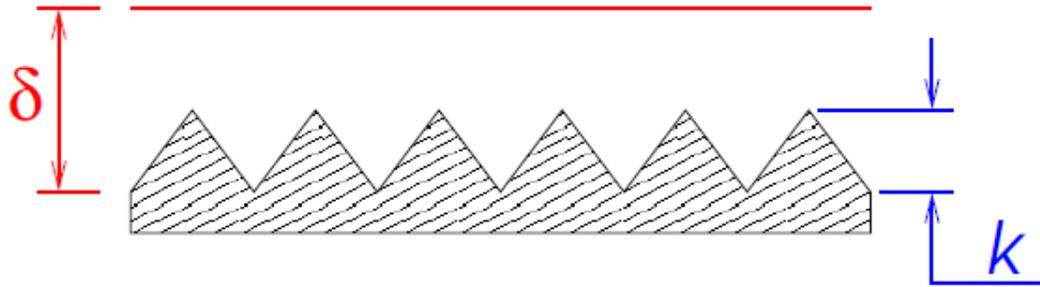
ϵ/D = rugosidade relativa [-]

D = diâmetro do tubo (seção circular) ou diâmetro hidráulico (seção não circular)

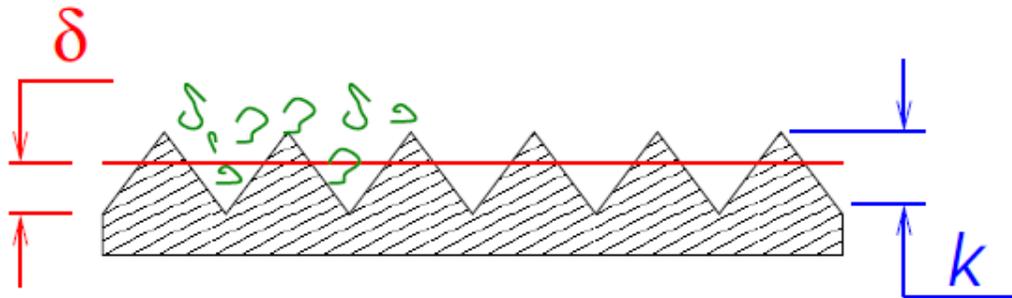
Perda de carga distribuída

δ = espessura da camada limite

k = rugosidade uniforme



Duto hidraulicamente liso ($\delta > k$)



Duto hidraulicamente rugoso ($\delta < k$)

Irregularidades = promotores de turbulência com descolamento e formação de superfícies descontínuas , vórtices e esteiras

Perda de carga distribuída

Por conservação de energia em uma tubulação qualquer:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_{bomba} = \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbina} + h_L$$

$$\alpha_{laminar} = 2 \text{ e } \alpha_{turbulento} = 1$$

$$H = \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{\bar{V}^2}{2g} + z$$

Logo:

$$H_1 + h_{bomba} = H_2 + h_{turbina} + h_L$$

Perda de carga distribuída

Para escoamentos completamente desenvolvidos:

$$\alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Pela conservação de massa:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 \bar{V}_1 A_1 = \rho_2 \bar{V}_2 A_2$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

seção transversal
constante

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Perda de carga distribuída

Na ausência de turbinas, bombas e singularidades:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + \cancel{h_{bomba}} = \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + \cancel{h_{turbina}} + h_L$$

$$h_L = h_d = \Delta H = \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

Na ausência transferência de calor, demonstra-se que:

$$h_d = \frac{2\tau_p L}{\gamma D_h}; L = \text{comprimento do tubo e } D_h = \text{diâmetro hidráulico}$$

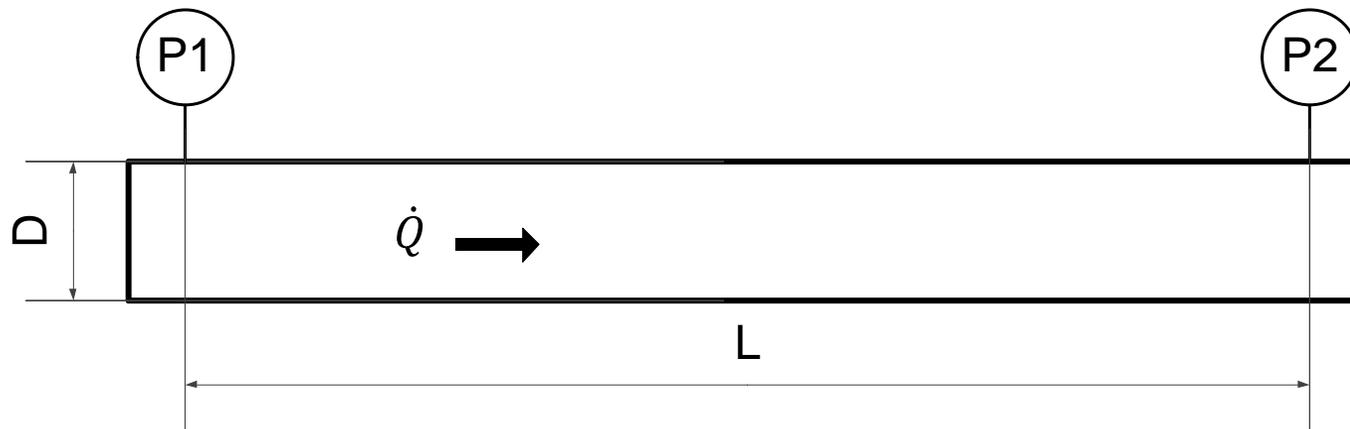
Perda de carga distribuída

Desenvolvimento do Diagrama de Moody $\longrightarrow f = \phi \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right)$

Bancada com tubo artificialmente rugosos (grãos de areia com diferentes dimensões uniformemente distribuídos)

Variação da vazão volumétrica e da rugosidade ε ($1/30 < \varepsilon < 1/1024$)

Medição de $\Delta p = p_1 - p_2$ $\longrightarrow \Delta p = \gamma h_L = \gamma f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g}$ $\longrightarrow f$



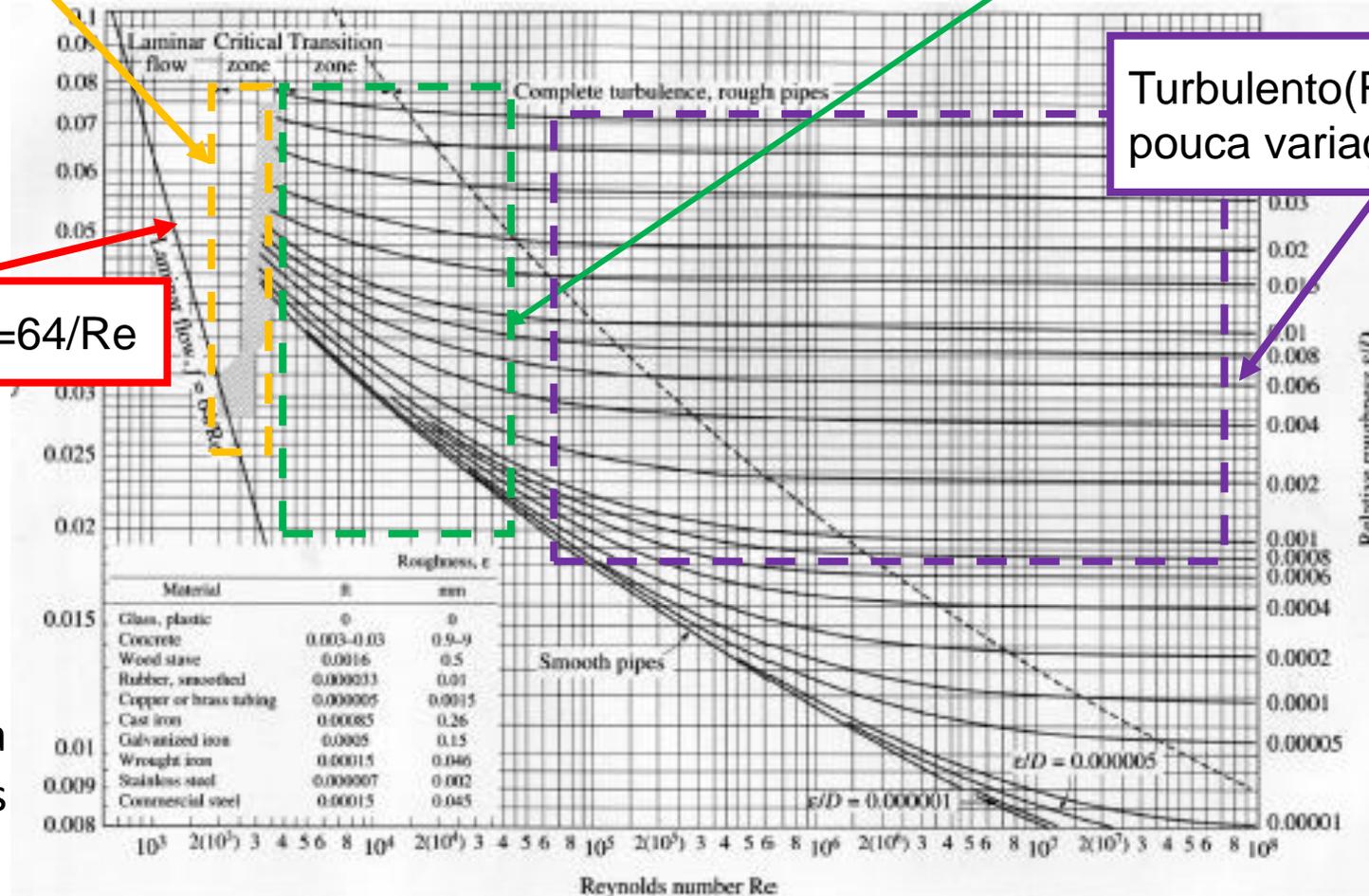
Perda de carga distribuída

Transição: Aumento brusco de f na transição (mudança dos perfis de velocidade)

Turbulento (Região 1): Redução com aumento de Re

Turbulento (Região 2): pouca variação com Re

Laminar $\rightarrow f = 64/Re$



Precisão de $\pm 10\%$

Para menor incerteza deve-se realizar ensaios específicos

Perda de carga distribuída

Rugosidade de tubos

Tubo	Rugosidade (ϵ) [mm]
Aço rebitado	0,9 - 9
Concreto	0,3 - 3
Madeira	0,2 – 0,9
Ferro fundido	0,26
Ferro galvanizado	0,15
Ferro fundido asfaltado	0,12
Aço comercial ou ferro forjado	0,046
Trefilado	0,0015
Plástico ou vidro lisos	0

Perda de carga distribuída

Determinação de f para o escoamento turbulento

Expressões empíricas

- Fórmula de Colebrook (transcendente)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

- Fórmula de Souza-Cunha-Marques (erro máximo=0,5%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,16}{\text{Re}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,09}{\text{Re}^{0,87}} \right) \right]$$

- Correlação de Blasius (tubos lisos, $\text{Re} \leq 10^5$)

$$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$$

Problemas fundamentais de perda de carga distribuída

1. Equações empíricas ou diagrama de Moody

2. Equação de continuidade

3. Avaliação do número de Reynolds

4. Equação de perda de carga distribuída

4 equações

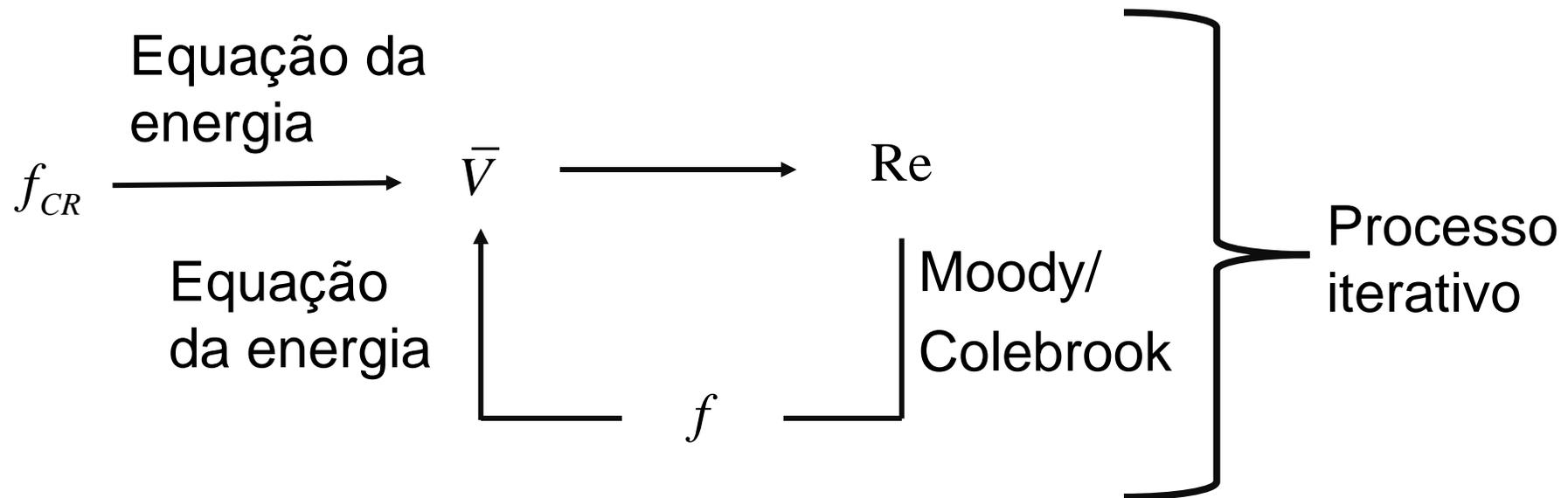
6 incógnitas (f, D, \bar{V}, Q, Re e h_d)

Determinação da vazão volumétrica em função de Δh e D

Aplicação da equação de energia e de fator de atrito: $\bar{V} = \bar{V}(f)$

Estimativa inicial: regime completamente rugoso

$$f_{CR} = \left[-2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2}$$



Exercício 01

Uma queda de pressão de 700 kPa é medida sobre um comprimento de 300 m de um tubo horizontal em ferro forjado de 10 cm de diâmetro que transporta óleo ($\rho=900 \text{ kg/m}^3$, $\nu=0,00001 \text{ m}^2/\text{s}$). Nestas condições, calcule a vazão que passa pelo tubo.

Equação de energia:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g} + z_2 \right) = h_L = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} \Rightarrow \Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \bar{V}^2 \Rightarrow \bar{V} = \sqrt{\frac{2\Delta p D}{f \rho L}}$$

Ferro forjado: $\varepsilon=0,046 \text{ mm} \rightarrow \varepsilon/D=0,046/100=0,00046$

Exercício 01

$$f_{CR} = \left[-2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[-2,0 \log \left(\frac{0,00046}{3,7} \right) \right]^{-2} = 0,0164$$

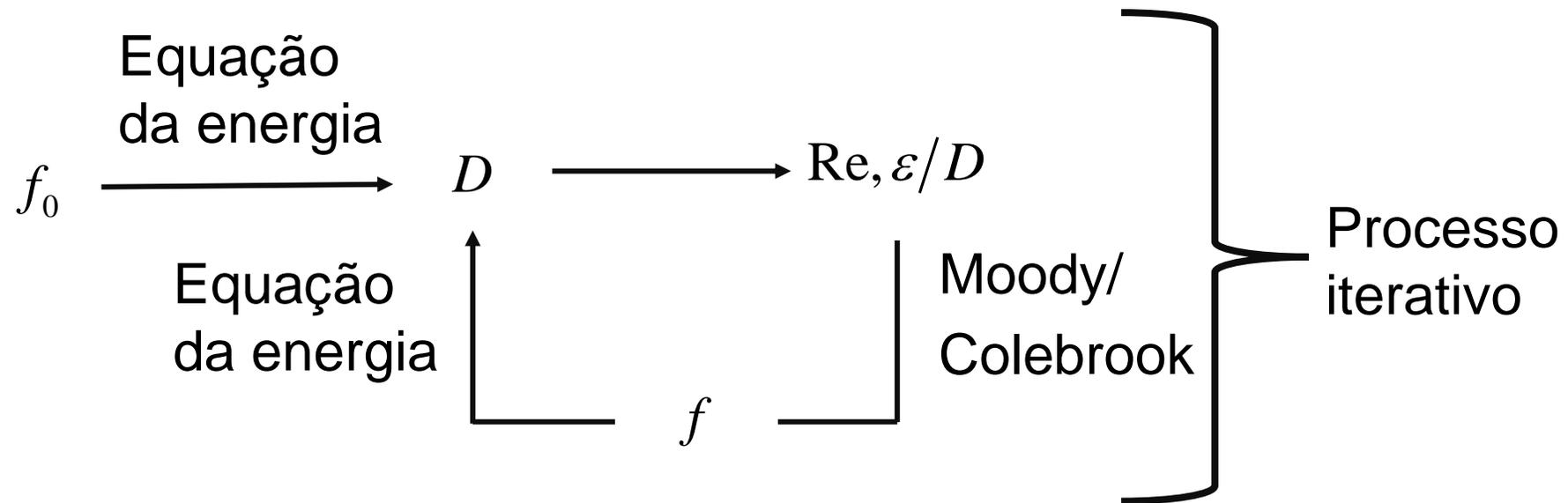
$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2\Delta p D}{f \rho L}} = \sqrt{\frac{2 * 700 * 10^3 * 10 * 10^{-2}}{0,0164 * 900 * 300}} = 5,62 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{V} D}{\nu} = \frac{5,62 * 10 * 10^{-2}}{0,00001} = 5,62 * 10^4 \xrightarrow{\text{Colebrook}} f = 0,0220$$

i	f_i	V(m/s)	Re	f_{i+1}	$\dot{Q} = \bar{V} A = \bar{V} A \frac{\pi D^2}{4} =$
0	0,0164	5,61	$5,61 * 10^4$	0,0220	
1	0,0220	4,85	$4,85 * 10^4$	0,0226	$\dot{Q} = 4,79 * \frac{\pi * (10 * 10^{-2})^2}{4}$
2	0,0226	4,79	$4,79 * 10^4$	0,0226	$\dot{Q} = 0,0376 \text{ m}^3/\text{s}$

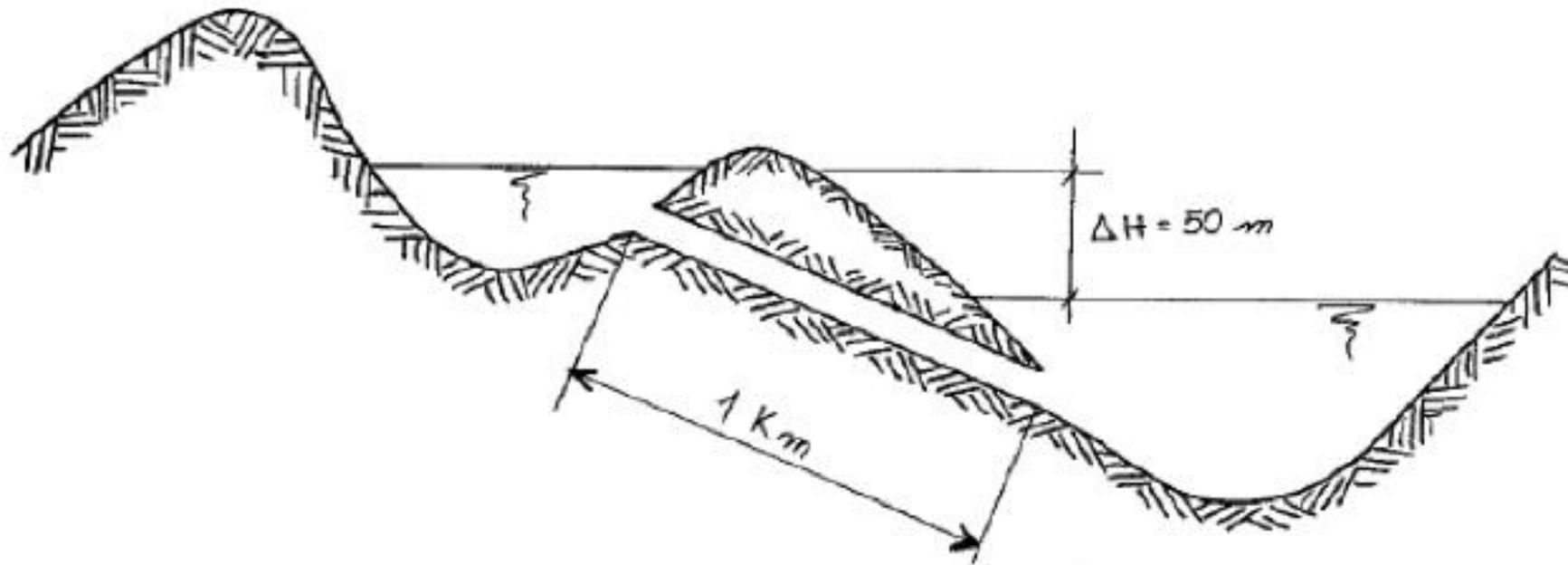
Determinação do diâmetro em função de Δh e \dot{Q}

Estimativa inicial: fator de atrito avaliado por Moody na faixa de operação



Exercício 02

Na instalação da figura quer se determinar o diâmetro da tubulação, para que na condição de operação a vazão seja de $1,0 \text{ m}^3/\text{s}$, desprezando-se as perdas de carga singulares. A rugosidade média do tubo é de $\varepsilon=0,001\text{m}$ e a viscosidade cinemática do fluido $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$



Exercício 02

Equação de energia:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}_2^2}{2g} + z_2 \right) = h_L = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\underbrace{\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \dot{Q} = \bar{V}A = \bar{V} \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \bar{V} = \frac{4\dot{Q}}{\pi D^2}}_{\text{Substituição}}$$

$$\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} = f \frac{L}{2gD} \frac{16\dot{Q}^2}{\pi^2 D^4} \Rightarrow D = \sqrt[5]{\frac{8fL\dot{Q}^2}{\pi^2 g \Delta H}}$$

Exercício 02

Substituindo os valores fornecidos:

$$D = \sqrt[5]{\frac{8fL\dot{Q}^2}{\pi^2 g \Delta H}} = \sqrt[5]{\frac{8f * 1000 * (1,0)^2}{\pi^2 * 9,8 * 50}} = \sqrt[5]{1,654f}$$

$$Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{4\dot{Q}D}{\pi D^2 \nu} = \frac{4\dot{Q}}{\pi D \nu} = \frac{4 * 1,0}{\pi D * 10^{-6}} = \frac{4x10^6}{\pi D}$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$f_0 = 0,0200 \Rightarrow D = \sqrt[5]{1,654 * 0,0200} \Rightarrow D = 0,5057m$$

$$\underbrace{Re = \frac{4x10^6}{\pi D} = \frac{4x10^6}{\pi * 0,0507} = 2,51x10^6 \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,001}{0,5057} = 0,00198}$$

$$f_1 = 0,0234$$

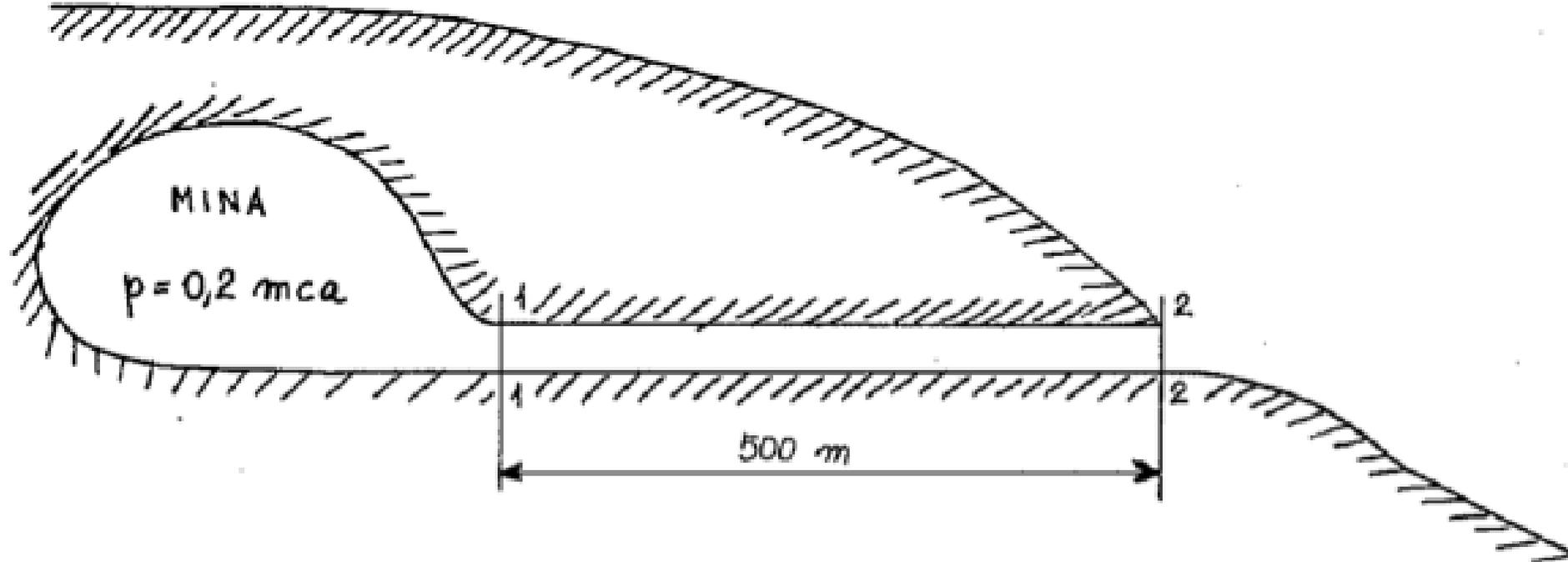
Exercício 02

i	f_i	$D(m)$	Re	ε/D	f_{i+1}
0	0,0200	0,5057	$2,51 \times 10^6$	0,00198	0,0234
1	0,0234	0,5218	$2,44 \times 10^6$	0,00192	0,0232
2	0,0232	0,5209	$2,44 \times 10^6$	0,00192	0,0232

Diâmetro comercial: $D_i=527$ mm (22", Sch 40)

Exercício 03

Uma galeria de seção quadrada ($0,6\text{m} \times 0,6\text{m}$) esgota ar de uma mina, onde a pressão é de $0,2 \text{ mca}$, para a atmosfera. Calcule a vazão de ar, desprezando as perdas singulares. Dados: $\nu_{\text{ar}} = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\gamma_{\text{ar}} = 12,7 \text{ N/m}^3$, $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$.



Exercício 03

Equação de energia:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1}{2g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2}{2g} + z_2 \right) = h_L = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4 * (0,6)^2}{4 * 0,6} = 0,6m$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \Rightarrow \bar{V} = \sqrt{\frac{2gD_h \Delta p}{\gamma L f}}$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2 * 9,8 * 0,6 * 0,2 * 9800}{12,7 * 500 f}} = \sqrt{\frac{3,630}{f}}$$

Exercício 03

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{0,001}{0,6} = 0,00167$$

$$f_{CR} = \left[-2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[-2,0 \log \left(\frac{0,00167}{3,7} \right) \right]^{-2} = 0,0223$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{3,630}{f}} = \sqrt{\frac{3,630}{0,0223}} = 12,76 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{12,76 * 0,6}{10^{-5}} = 7,66 \times 10^5 \xrightarrow{\text{Coolebrook}} f_{i+1} = 0,0226$$

Exercício 03

i	f_i	V(m/s)	Re	f_{i+1}
0	0,0223	12,76	$7,66 \times 10^5$	0,0226
1	0,0226	12,68	$7,60 \times 10^5$	0,0226

$$\dot{Q} = \bar{V}A = 12,68 * (0,6)^2 = 4,56 m^3/s$$