

14ª lista de Exercícios

Pasta 16

Pasta 10

Nº cópias

20

QTDE.FLS.: 20

19/05/14

$$) \text{Var}(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & x_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x_n^2 \end{bmatrix}$$

$$) \hat{\underline{\beta}} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} \underline{y}$$

$$X' = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad V^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2} \right)$$

$$X' V^{-1} X = n \quad X' V^{-1} \underline{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}}{n}$$

Por transformações de variáveis: $y_i = \beta x_i + \epsilon_i$

$$\text{Seja } \epsilon_i^* = \frac{\epsilon_i}{x_i}, \quad \text{Var}(\epsilon_i^*) = \frac{1}{x_i^2} \text{Var}(\epsilon_i) = \frac{x_i^2 \sigma^2}{x_i^2} = \sigma^2$$

$$\text{modelo transformado: } \frac{y_i}{x_i} = \beta \frac{x_i}{x_i} + \frac{\epsilon_i}{x_i}$$

$$z_i = \frac{y_i}{x_i} = \beta + \epsilon_i^*$$

Estimador de mínimos Quadrados de β no modelo transformado $\hat{\beta} = \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

2

$$b) \text{Var}(\hat{\beta}) = (X'V^{-1}X)^{-1}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{ou}$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \text{Var}(Y_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \sigma^2}{x_i^2}$$

↓
indep entre Y_i 's

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

c) No modelo transformado

$$Z_i = \frac{Y_i}{x_i} \sim N(\beta, \sigma^2) \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{e s\~ao independentes}$$

$$\text{IC para } \beta : \quad \bar{z} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1} = \frac{SSE}{n-1} \quad \text{pois } \hat{z}_i = \bar{z} \quad \forall i$$

$$t_c \text{ tal que } P(-t_c \leq t \leq t_c) = \gamma \quad t \sim t\text{-student com } n-1 \text{ gl}$$

$$2) E(Y_i | W_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i$$

a) $E(Y_i | W_i = 0) = \beta_0$ - nota média dos alunos sujeitos ao método de ensino A

$E(Y_i | W_i = 1) = \beta_0 + \beta_1$ - nota média dos alunos sujeitos ao método de ensino B

β_1 - nota média sob o método B menos nota média sob o método A.

b) Se $\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$ é o estimador de mínimos quadrados

do modelo, como estão satisfeitas todas as suposições do modelo linear geral $(Y \sim N_n(X\beta, \sigma^2 I))$

então $\hat{\beta}_1$ é o estimador NVUVM de β_1 , que é a diferença de médias.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{WY}}{S_{WW}} = \frac{\sum W_i Y_i - n \bar{W} \bar{Y}}{\sum W_i^2 - n \bar{W}^2}$$

Como $\sum W_i = n_2 = \sum W_i^2$ e $\sum W_i Y_i = n_2 \bar{Y}_2$,

com $\bar{Y}_2$ - média amostral das notas dos alunos sujeitos ao método B, então

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{n_2 \bar{Y}_2 - (n_1 + n_2) \frac{n_2}{n_1 + n_2} \bar{Y}}{n_2 - n \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}} = \quad n = n_1 + n_2 \\ &= \frac{n n_2 (\bar{Y}_2 - \bar{Y})}{n_2 (n - n_2)} = \frac{n \left(\bar{Y}_2 - \frac{n_1 \bar{Y}_1 + n_2 \bar{Y}_2}{n_1 + n_2} \right)}{n_1} = \\ &= \frac{n (n_1 \bar{Y}_2 - n_1 \bar{Y}_1)}{n_1 n} = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1,\end{aligned}$$

$\bar{Y}_1$ - média amostral das notas dos alunos sujeitos ao método A.

$$c) H_0: \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0.$$

O teste para $H_0: \beta_1 = 0$ segundo a hipótese linear geral coincide com o teste obtido na tabela de análise de variância. Neste caso

$$SSR = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum W_i^2 - \frac{(\sum W_i)^2}{n} \right) = (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)^2 \left(n_2 - \frac{n_2^2}{n} \right) =$$

$$= (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)^2 \frac{n_2 n_1}{n}$$

$$SSE = \sum_A (Y_i - \bar{Y}_1)^2 + \sum_B (Y_i - \bar{Y}_2)^2 =$$

$$= (n_1 - 1) S_A^2 + (n_2 - 1) S_B^2, \text{ onde}$$

$$S_A^2 = \frac{\sum_A (Y_i - \bar{Y}_1)^2}{n_1 - 1} \quad S_B^2 = \frac{\sum_B (Y_i - \bar{Y}_2)^2}{n_2 - 1}$$

Rejeita-se H_0 se

$$F = \frac{n_2 n_1 (\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)^2}{n \frac{(n_2 - 1) S_B^2 + (n_1 - 1) S_A^2}{n - 2}} \gg F_c(1, n - 2, \alpha)$$

d) A estatística F acima pode ser escrita como

$$F = \frac{(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)^2}{\frac{(n_2 - 1) S_B^2 + (n_1 - 1) S_A^2}{n_2 + n_1 - 2} \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right)}, \text{ que é o}$$

quadrado de

$$t = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{(n_2-1)S_B^2 + (n_1-1)S_A^2}{n_2 + n_1 - 2}}}, \text{ que testa}$$

a igualdade de médias de duas populações independentes com distribuições normal e variâncias iguais.

Como o quadrado da v.a. com dist. t_{n-2} é uma v.a. com dist. $F_{1, n-2}$, os testes são equivalentes.

$$3) a) X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 20 \\ 15 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$X'V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/25 & 1/25 & 1/100 \\ 1 & 1/2 & 1/5 & 1/5 & 1/10 \end{bmatrix} \quad X'V^{-1}X = \begin{bmatrix} \frac{134}{100} & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(X'V^{-1}X)^{-1} = \frac{1}{2,7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1,34 \end{bmatrix} \quad X'V^{-1}\underline{y} = \begin{bmatrix} 17,4 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\beta}}_G = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0G} \\ \hat{\beta}_{1G} \end{bmatrix} \quad \hat{y} = 10 + 2x$$

A fórmula dos estimadores pode ser obtida por

$$\hat{\beta}_G = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y \quad \text{com } X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{bmatrix}$$

$$V = \text{diag}(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2) \quad \text{ou por transformação}$$

de variáveis:

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{\alpha}{x_i} + \beta \frac{x_i}{x_i} + \frac{\epsilon_i}{x_i}, \quad \text{Var}\left(\frac{\epsilon_i}{x_i}\right) = \frac{\sigma^2 x_i^2}{x_i^2} = \sigma^2 \quad \forall i$$

$$z_i = \alpha \frac{1}{x_i} + \beta + \epsilon_i^*$$

$$\therefore \hat{\beta} = \bar{z} - \hat{\alpha} \bar{w}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum (w_i - \bar{w})(z_i - \bar{z})}{\sum (w_i - \bar{w})^2}, \quad \text{com } z_i = \frac{y_i}{x_i}$$

$$w_i = \frac{1}{x_i}$$

b) É possível testar de 3 maneiras

I) Teste para o intercepto do modelo transformado

$$\hat{z}_i = 10w_i + 2$$

$$t = \frac{2 - 1}{\sqrt{V}} \quad V = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum w_i^2}{n S_{ww}}$$

$$W: 1, 1/2, 1/5, 1/5, 1/10$$

$$S_{ww} = 1,34 - 5 \cdot 0,4^2 = 0,54$$

$$SSE = \sum_{i=1}^5 (\hat{z}_i - z_i)^2 = 1 + 4 + 0 + 1 + 4 = 10$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{10}{3}$$

$$W_i \quad z_i \quad \hat{z}_i$$

$$1 \quad 13 \quad 12$$

$$1/2 \quad 5 \quad 7$$

$$1/5 \quad 4 \quad 4$$

$$1/5 \quad 3 \quad 4$$

$$1/10 \quad 5 \quad 3$$

$$H_0: \beta = 1$$

$$H_a: \beta > 1$$

$$t = \frac{2 - 1}{\sqrt{\frac{10/3 \cdot 1,34}{5 \cdot 0,54}}} = 0,777$$

↓
não signif.

Teste t unicaudal à direita
Rej H_0 p/ $t_{obs} > t_c$, dist t_3 .

II) Teste para a inclinação do modelo inicial usando os estimadores de mínimos quadrados generalizados

$$t = \frac{\hat{\beta}_{1G} - 1}{\sqrt{V}}$$

V - elemento a_{22} da matriz
 $(X'V^{-1}X)^{-1} \hat{\sigma}_G^2$, pois $\text{Var}(\hat{\beta}_G) =$
 $(X'V^{-1}X)^{-1} \hat{\sigma}_G^2$

$$\hat{\sigma}_G^2 = \frac{1}{n-k-1} (\tilde{Z}'\tilde{Z} - \hat{\beta}_G' Q' \tilde{Z}) = \frac{1}{n-k-1} (\tilde{Y}'V^{-1}\tilde{Y} - \hat{\beta}_G' X'V^{-1}\tilde{Y})$$

$$\tilde{Y}'V^{-1}\tilde{Y} = 244$$

$$\hat{\beta}_G' X'V^{-1}\tilde{Y} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17,4 \\ 30 \end{bmatrix} = 234$$

$$\hat{\sigma}_G^2 = \frac{10}{3}$$

$$H_0: \beta = 1$$

$$H_a: \beta > 1$$

$$t = \frac{2 - 1}{\sqrt{\frac{1,34 \cdot 10}{2,7 \cdot 3}}} = 0,777$$

b

idêntico a I

III) Uso da estatística W

10

$$W = \frac{(C\hat{\beta}_G - \underline{m})' [C(X'V^{-1}X)^{-1}C']^{-1} (C\hat{\beta}_G - \underline{m})}{p \hat{\sigma}_G^2}$$

teste $H_0: \beta_1 = 1$ para $C = [0 \ 1]$ $\underline{m} = [1]$
 $H_a: \beta_1 \neq 1$

$$C(X'V^{-1}X)^{-1}C' = [0 \ 1] \frac{1}{2,7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1,34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1,34}{2,7}$$

$$C\hat{\beta}_G = 2 \quad p = 1$$

$$W = \frac{(2-1)^2}{1 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1,34}{2,7}} \quad W = t^2 \text{ dos itens I) e II)}$$

Utilizar $t = \sqrt{W}$ com o sinal de $\hat{\beta}_1 - 1$

$$\therefore t = + \sqrt{W} = 0,777$$

Rej H_0 no teste $H_0: \beta_1 = 1$ para $t_{\text{obs}} \geq t_c$
 $H_a: \beta_1 > 1$ dist t_3 .

4) a) Método A $(z_1, z_2) = (1, 0)$

11

$$E(Y|x, (z_1, z_2) = (1, 0)) = \beta_0 + \beta_1 x + \alpha = \beta_0 + \alpha_1 + \beta_1 x$$

Método B $(z_1, z_2) = (0, 1)$

$$E(Y|x, (z_1, z_2) = (0, 1)) = \beta_0 + \alpha_2 + \beta_1 x$$

Método C $(z_1, z_2) = (0, 0)$

$$E(Y|x, (z_1, z_2) = (0, 0)) = \beta_0 + \beta_1 x$$

b) β_1 - acréscimo médio na nota com o aumento de uma hora de estudo. O modelo está admitindo que esse acréscimo é o mesmo para os três métodos.

α_1 - diferença entre as notas médias do método A e C para alunos que estudaram a mesma quantidade de horas

α_2 - " " " " " " " " B
e C " " " " "

12

$$5) \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad Y = X\beta + \epsilon$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

modelo de posto completo

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow C\beta = m \text{ para } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 2y_3 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{6} \\ \frac{2y_3 - y_2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$C(X'X)^{-1}C' = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{11}{30}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ n=3}}{n-2}} \left[(y_1 - \hat{\beta}_1)^2 + (y_2 - 2\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)^2 + (y_3 - \hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2)^2 \right]$$

$$W = \frac{(C\hat{\underline{\beta}} - m)' [C(X'X)^{-1}C']^{-1} (C\hat{\underline{\beta}} - m)}{1 \hat{\sigma}^2} =$$

$$= \frac{(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)^2}{\hat{\sigma}^2} \cdot \frac{30}{11}$$

Rej H_0 se $W > F_{1,1}$

$$6) X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$V = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$$

$$X'V^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 5/2 & 5/2 \end{bmatrix} X$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 21 & 69 \end{bmatrix} \quad (X'V^{-1}X)^{-1} = \frac{1}{111} \begin{bmatrix} 69 & -21 \\ -21 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X'V^{-1}y = \begin{bmatrix} 37 \\ 111 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta}_G = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{y} = 2 + 1x$$

$$\hat{\sigma}_G^2 = \frac{1}{n-k-1} \left[y'V^{-1}y - \underbrace{y'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y}_{\hat{\beta}_G'} \right]$$

$$y'V^{-1}y = ~~188,5~~ 188,5$$

$$\hat{\beta}_G' X'V^{-1}y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ 111 \end{bmatrix} = 185$$

$$\hat{\sigma}_G^2 = \frac{1}{8} [188,5 - 185] = 0,4375$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1) = \frac{8}{111} \cdot \hat{\sigma}_G^2$$

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_a: \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{1 - 0}{\sqrt{\frac{8}{111} \cdot 0,4375}} = \frac{1}{0,177} = 5,649$$

$$t_{obs} > t_{c,8} \quad \text{Rej. } H_0$$

$$7) a) \hat{\beta} = \left(\underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{1} \right)^{-1} \underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}$$

$$\hat{\beta}_G = \left(\underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{1} \right)^{-1} \underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{y}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho} \left[I_n - \frac{\rho}{1+(n-1)\rho} \underset{\sim}{1} \underset{\sim}{1}' \right]$$

$$\underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho} \left[\underset{\sim}{1}' - \frac{\rho}{1+(n-1)\rho} n \underset{\sim}{1}' \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\rho} \frac{1-\rho}{1+(n-1)\rho} \underset{\sim}{1}' = \frac{1}{1+(n-1)\rho} \underset{\sim}{1}'$$

$$\underset{\sim}{1}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{1} = \frac{n}{1+(n-1)\rho}$$

$$\hat{\beta}_G = \frac{1+(n-1)\rho}{n} \frac{1}{1+(n-1)\rho} \underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \hat{\beta}_G$$

$$b) \Sigma X = \begin{bmatrix} 1+(n-1)\rho \\ 1+(n-1)\rho \\ \vdots \\ 1+(n-1)\rho \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} X & F \\ n \times 1 & 1 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} F \quad \Sigma X = X F$$

$$\Rightarrow F = 1+(n-1)\rho$$

8) a) Saída do Minitab C₁ - área C₂ - preço

The regression equation is
C₂ = - 1,62 + 0,0803 C₁

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-1,618	1,798	-0,90	0,380
C ₁	0,080330	0,003302	24,33	0,000

S = 2,817 R-Sq = 97,0% R-Sq(adj) = 96,9%

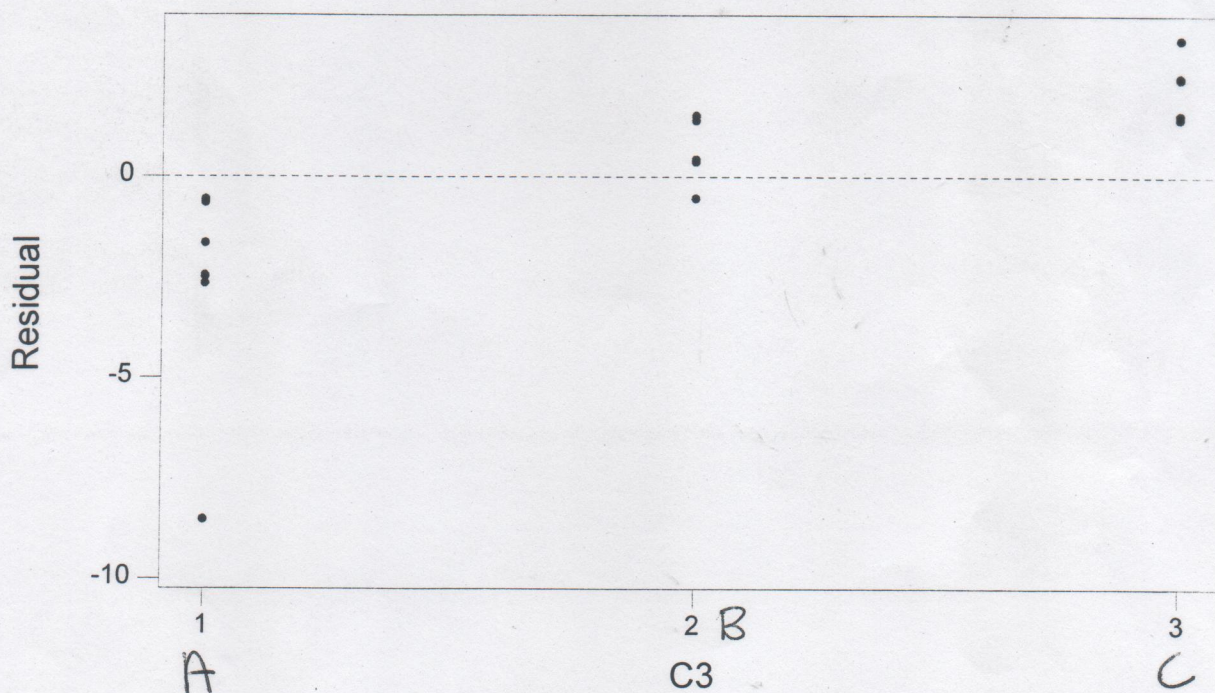
Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	4697,7	4697,7	591,85	0,000
Residual Error	18	142,9	7,9		
Total	19	4840,5			

b)

Residuals Versus C₃

(response is C₂)



Todos os resíduos da região C são positivos e todos da região A são negativos. Esse fato é indicativo de que terrenos da região C tendem a apresentar preços maiores que terrenos da região A de mesma área. Assim, a variável região deve ser considerada no modelo.

c) Vamos utilizar o modelo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \epsilon$$

com Y - preço X - área

$$(Z_1, Z_2) = \begin{cases} (0, 0) & \text{região A} \\ (1, 0) & \text{região B} \\ (0, 1) & \text{região C} \end{cases}$$

Com isso, temos

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon \quad \text{região A}$$

$$Y = \beta_0 + \gamma_1 + \beta_1 X + \epsilon \quad \text{região B}$$

$$Y = \beta_0 + \gamma_2 + \beta_1 X + \epsilon \quad \text{região C}$$

que é um modelo com três retas paralelas.

Saída do Minitab $C_4 = Z_1$ $C_5 = Z_2$

Regression Analysis: C2 versus C1; C4; C5

The regression equation is

$$C2 = -5,69 + 0,0832 C1 + 3,51 C4 + 5,20 C5$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-5,695	1,358	-4,19	0,001
C1	0,083199	0,002124	39,16	0,000
C4	3,5083	0,9680	3,62	0,002
C5	5,2016	0,9718	5,35	0,000

S = 1,754

R-Sq = 99,0%

R-Sq(adj) = 98,8%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	4791,3	1597,1	519,07	0,000
Residual Error	16	49,2	3,1		
Total	19	4840,5			

Source	DF	Seq SS
C1	1	4697,7
C4	1	5,5
C5	1	88,1

Portanto, o modelo ajustado é

$$\hat{Y} = -5,69 + 0,0832x + 3,51z_1 + 5,20z_2,$$

assim

$$\hat{Y} = -5,69 + 0,0832x \quad \text{para a região A}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= -5,69 + 3,51 + 0,0832x \\ &= -2,18 + 0,0832x \quad \text{para a região B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= -5,69 + 5,2 + 0,0832x \\ &= -0,49 + 0,0832x \quad \text{para a região C} \end{aligned}$$

A restrição imposta é que o preço médio do m² é o mesmo nas três regiões.

d) B e C são coincidentes $\Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$

O modelo reduzido sob $H_0: \gamma_1 = \gamma_2$ é

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \gamma_1 (z_1 + z_2) + \epsilon$$

Ajustando-se esse modelo, obtemos $SSE_r = 57,8$ e

$$W = \frac{57,8 - 49,2}{49,2/16} = 2,8$$

$$F_{0,1,16,0,05} = 4,49 \quad \text{não rejeitamos } H_0$$

e) Preço independe da região $\Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = 0$

Com as informações disponíveis, a maneira mais fácil de testar esta hipótese é através da forma alternativa de W ;

$$W = \frac{SSE_R - SSE_C}{SSE_C} \cdot \frac{n - K - 1}{p}$$

onde

SSE_C - soma de quadrados do resíduo do modelo completo $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + \hat{\gamma}_1 Z_1 + \hat{\gamma}_2 Z_2$

SSE_R - soma de quadrados do resíduo do modelo reduzido $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

$$p = 2 \quad n - K - 1 = 20 - 3 - 1 = 16$$

$$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

H_a : Pelo menos um dos γ_i , $i=1,2$ é diferente de zero.

$$W = \frac{142,9 - 49,2}{49,2} \cdot \frac{16}{2} = 15,235$$

$$F_{C, 2, 16, 0,05} = 3,63$$

Rejeitamos H_0

Os testes F parciais para $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = 0$ (separadamente) são significantes (saída do Minitab, $T = 3,62 \Rightarrow F_p = 13,1 (3,62^2)$ e $T = 5,35$ e $F_p = 5,35^2 = 28,62$, p-values 0,002 e 0,000 respectivamente), e mesmo ocorrendo para a área X (significante, p-value = 0,000), nenhuma variável será eliminada do modelo completo.

9) O estimador de máxima verossimilhança de β sob a hipótese $C\beta = \underline{m}$ é

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}C'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(C\hat{\beta} - \underline{m})$$

$$\begin{aligned} C\hat{\beta}_0 &= C\hat{\beta} - C(X'X)^{-1}C'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(C\hat{\beta} - \underline{m}) \\ &= C\hat{\beta} - C\hat{\beta} + \underline{m} = \underline{m}. \end{aligned}$$

10) $H_0: C\beta = \underline{m}$ para $C = I_{K+1}$ $\underline{m} = \underline{b}$

$$W = \frac{(\hat{\beta} - \underline{b})' [I(X'X)^{-1}I]^{-1} (\hat{\beta} - \underline{b})}{(K+1) \text{ MSE}}$$

(K+1) MSE

↳ quadrado médio do resíduo do

modelo ajustado $[\hat{y} = X\hat{\beta}]$

$$W = \frac{(\hat{\beta} - \underline{b})' (X'X) (\hat{\beta} - \underline{b})}{(K+1) \text{MSE}}$$

Rejeita-se H_0 para $W \geq F_{\alpha, K+1, n-K-1}$

Estimador de mínimos quadrados de β sob H_0 , coincide com o de máxima verossimilhança sob H_0 :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \hat{\beta} - (X'X)^{-1} I \left[I (X'X)^{-1} I \right]^{-1} (\hat{\beta} - \underline{b}) \\ &= \hat{\beta} - \hat{\beta} + \underline{b} = \underline{b} \end{aligned}$$