

# Fundamentos de Combustão

## Aula X - Equação da Energia

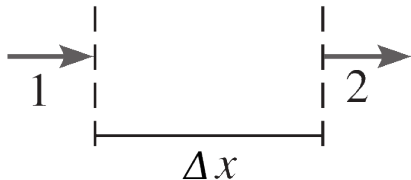
Prof. Dr. Guenther Carlos Krieger Filho

Escola Politécnica da USP - LETE

3 de agosto de 2020



# Fluxo mássico da espécie $i$



Regime Permanente

$$\frac{\partial}{\partial t}() = 0 \quad (1)$$

- Fluxo mássico da espécie  $i$ :

$$\dot{m}_i'' = Y_i \rho (u + V_i) \quad (2)$$

$$\left[ \frac{kg_i}{m^2 s} \right] = [ ] \left[ \frac{kg_i}{m^3} \right] \left[ \frac{m}{s} \right]$$

**Obs\*** A velocidade absoluta da espécie  $i$  é dividida em duas parcelas

1ª:  $V_i \longrightarrow$  velocidade de difusão relativa à mistura

2ª:  $u \longrightarrow$  velocidade da mistura (Bulk)

# Balanço de massa p/ espécie i

- Balanço de massa p/ espécie i:

$$\underbrace{Y_i \rho(u + V_i)|_{x+\Delta x} - Y_i \rho(u + V_i)|_x}_{\left[ \frac{kg_i}{m^2 s} \right]} = \underbrace{\dot{\omega}_i \Delta x}_{\left[ \frac{kg_i}{m^3 s} \right] [m]} \quad (3)$$

fazendo  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ , (3) torna-se

$$\frac{d}{dx} [Y_i \rho(u + V_i)] = \dot{\omega}_i \quad (4)$$

A velocidade da espécie se relaciona com a velocidade da mistura por:

$$\sum_i Y_i \rho(u + V_i) = \rho u \quad (5)$$

# Balanço de massa p/ espécie i

mas  $\sum_i Y_i = 1$  (por definição de  $Y_i$ ), então

$$\sum_i Y_i \rho u + \sum_i Y_i \rho V_i = \rho u$$

$$\rho u + \rho \sum_i Y_i V_i = \rho u \therefore \boxed{\sum_i Y_i V_i = 0} \quad (6)$$

— para regime permanente, a continuidade é  $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \rho u = cte \end{cases} \quad (7)$

# Balanço de massa p/ espécie i

Voltando à equação (4)

$$\frac{\partial}{\partial x} [Y_i \rho u] + \frac{\partial}{\partial x} [Y_i \rho V_i] = \dot{\omega}_i \quad (8)$$

usando a Lei de Fick para a velocidade de difusão,  $V_i$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} [Y_i \rho u] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\rho D \frac{dY_i}{dx} \right] = \dot{\omega}_i \quad (9)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Y_i \rho u - \rho D \frac{dY_i}{dx} \right] = \dot{\omega}_i \quad (10)$$

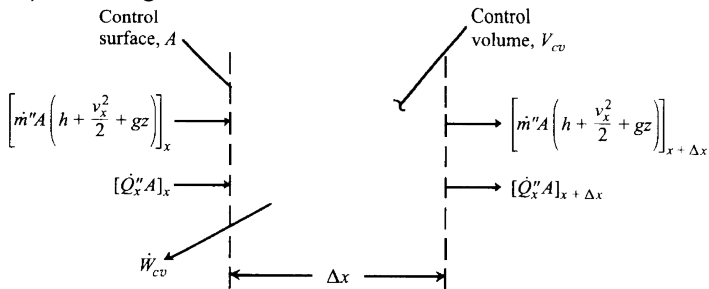
usando (7) em (10):

$$\rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\rho D \frac{dY_i}{dx} \right]}_{\text{Transporte devido à difusão de "i"}} = \dot{\omega}_i \quad (11)$$

Transporte devido  
à difusão de "i"

# Balanço de energia

- Balanço de energia



para um volume de controle com *única* espécie, desprezando energias potencial  $gz$  e cinética  $v^2/2$  e sem transferência de calor por radiação (sem perda de generalidade para a dedução multicomponente discutida neste capítulo), o balanço de energia no volume de controle é:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \left( \dot{m}'' h + \dot{Q}'' \right) A \right]_{in} - \left[ \left( \dot{m}'' h + \dot{Q}'' \right) A \right]_{out} - \dot{W} \quad (12)$$

# Balanço de energia

Usando a Lei de Fourier para o fluxo de calor por condução,  $\dot{Q}''$ ,

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \left( \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right) A \right]_{in} - \left[ \left( \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right) A \right]_{out} - \dot{W} \quad (13)$$

Regime permanente,  $\frac{dE}{dt} = 0$ , a equação da energia torna-se:

$$- \left[ \left( \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right) A \right]_{in} + \left[ \left( \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right) A \right]_{out} = -\dot{W} \quad (14)$$

Dividindo toda equação pela área A:

$$- \left[ \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right]_{in} + \left[ \dot{m}'' h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right]_{out} = -\dot{W}''' \Delta x \quad (15)$$

em que  $\dot{W}'''$  é a taxa volumétrica de trabalho técnico (ou útil) no volume de controle.

# Balanço de energia

O fluxo de entalpia da mistura pode ser expresso em função da soma dos fluxos de entalpia das espécies:

$$\dot{m}'' h = \sum_i \dot{m}_i'' h_i \rightarrow \sum_i \underbrace{Y_i \rho (u + V_i)}_{Eq.(2)} h_i \quad (16)$$

$$= \underbrace{\sum_i Y_i \rho u h_i}_{\text{Fluxo de entalpia absoluta devido ao fluxo da mistura}} + \underbrace{\sum_i Y_i \rho V_i h_i}_{\text{Fluxo de entalpia absoluta devido à difusão das espécies}} \quad (17)$$

Fluxo de entalpia  
absoluta devido ao  
fluxo da mistura

Fluxo de entalpia absoluta  
devido à difusão das espécies



# Balanço de energia

Substituindo (17) em (15)

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \underbrace{\left( \rho u \sum_i Y_i h_i + \sum_i Y_i \rho V_i h_i \right)}_h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right]_x \\
 & + \left[ \underbrace{\left( \rho u \sum_i Y_i h_i + \sum_i Y_i \rho V_i h_i \right)}_h + \left( -k \frac{dT}{dx} \right) \right]_{x+\Delta x} = -\dot{W}''' \Delta x \quad (18)
 \end{aligned}$$

dividindo toda a equação por  $\Delta x$  e fazendo  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  :

$$\frac{d}{dx} (\rho u h) + \frac{d}{dx} \left( \sum_i Y_i \rho V_i h_i \right) - \underbrace{\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right)}_{\text{Fluxo de energia p/ condução}} = -\dot{W}''' \quad (19)$$

# Balanço de energia

ou ainda

$$\frac{d}{dx} \rho u h + \frac{d}{dx} \left( \sum_i Y_i \rho V_i h_i \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \dot{W}''' \quad (20)$$

novamente usando a Lei de Fick para a velocidade de difusão:

$$\frac{d}{dx} \rho u h + \frac{d}{dx} \left( -\rho D \sum_i \frac{dY_i}{dx} h_i \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \dot{W}''' \quad (21)$$

mas

$$\frac{d \sum_i h_i Y_i}{dx} = \sum_i h_i \frac{dY_i}{dx} + \sum_i Y_i \frac{dh_i}{dx} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dx} \rho u h + \frac{d}{dx} \left( -\rho D \frac{d \sum_i h_i Y_i}{dx} + \rho D \sum_i Y_i \frac{dh_i}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \dot{W}''' \quad (23)$$

# Balanço de energia

ou ainda

$$\frac{d}{dx} \rho u h + \frac{d}{dx} \left( -\rho D \frac{dh}{dx} + \rho D \sum_i Y_i \frac{dh_i}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \dot{W}''' \quad (24)$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

A equação da energia pode ser simplificada no assim chamado *Formalismo de Shvab-Zeldovich*. As principais aproximações desta forma da equação da energia são:

- ① Calor específico a pressão constante da espécie,  $c_{p,i}$ , não é função da temperatura e tem o mesmo valor para todas as espécies;
- ② Calor específico da mistura,  $\overline{c_p}$ :

$$\overline{c_p} = \sum_i Y_i c_{p,i} \quad (25)$$

- ③ Difusividade de massa igual para todas as espécies, ou seja, uma mistura binária;
- ④ Difusividade térmica  $\alpha$  igual à difusividade de espécies,  $D$ , ou seja, Número de Lewis unitário:  $Le \equiv \frac{\alpha}{D} = 1$

Uma consequência importante das simplificações 1 e 2 é que a entalpia de formação das espécies, não é função da temperatura,  $h_{f,i}^o \neq h_{f,i}^o(T)$ , (ver livro do Kenneth Kuo, pg 50).

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

Assim, a entalpia absoluta da espécie  $i$  pode ser expressa por:

$$h_i = h_{f,i}^o + c_{p,i} \int_{T_{ref}}^T dT \quad (26)$$

e a entalpia absoluta da mistura:

$$h = \sum_i Y_i h_i = \sum_i Y_i h_{f,i}^o + \overline{c_{p,i}} \int_{T_{ref}}^T dT \quad (27)$$

em que a eq.(25) foi usada para o calor específico a pressão constante da mistura.

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

O termo  $\sum_i Y_i \frac{dh_i}{dx}$  da eq.(24) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 \sum_i Y_i \frac{dh_i}{dx} &= \sum_i Y_i \frac{d}{dx} \left( h_{f,i}^o + c_{p,i} \int_{T_{ref}}^T dT \right) = \sum_i Y_i \frac{d}{dx} \left( c_{p,i} \int_{T_{ref}}^T dT \right) \\
 &= \sum_i Y_i c_{p,i} \frac{d}{dx} \left( \int_{T_{ref}}^T dT \right) \\
 &= \bar{c}_p \frac{d}{dx} \left( \int_{T_{ref}}^T dT \right) \\
 &= \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \quad (28)
 \end{aligned}$$

assim, a eq.(24) pode ser reescrita:

$$\frac{d}{dx} \rho u h + \frac{d}{dx} \left( -\rho D \frac{dh}{dx} + \rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \dot{W}''' \quad (29)$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

$$\frac{d}{dx}\rho u h = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{\rho D \frac{dh}{dx}}_{\text{absoluta}} - \underbrace{\rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} + \underbrace{k \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} \right) - \dot{W}''' \quad (30)$$

$$\frac{d}{dx}\rho u h = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{\rho D \frac{dh}{dx}}_{\text{absoluta}} - \underbrace{\rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} + \underbrace{\rho \alpha \bar{c}_p \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} \right) - \dot{W}''' \quad (31)$$

com a simplificação 4 do formalismo de Shvab-Zeldovich,  $Le \equiv \frac{\alpha}{D} = 1$ ,

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

$$\frac{d}{dx} \rho u h = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{\rho D \frac{dh}{dx}}_{\text{absoluta}} - \underbrace{\rho D c_p \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} + \underbrace{\rho D c_p \frac{dT}{dx}}_{\text{sensível}} \right) - \dot{W}''' \quad (32)$$

assim:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} (\rho u h)}_{\text{(A)}} = \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \rho D \frac{dh}{dx} \right)}_{\text{(B)}} - \dot{W}''' \quad (33)$$



# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A}: \frac{d}{dx}(\rho u h) &= \rho u \frac{dh}{dx} = \rho u \frac{d}{dx} \left( \sum_i Y_i h_i \right) = \rho u \frac{d}{dx} \left[ \sum_i Y_i (h_{f,i}^o + \int_{T_{ref}}^T c_{p,i} dT) \right] \\
 &= \rho u \frac{d}{dx} \left[ \sum_i (Y_i h_{f,i}^o + Y_i \int_{T_{ref}}^T c_{p,i} dT) \right] = \rho u \frac{d}{dx} \left[ \sum_i Y_i h_{f,i}^o + \bar{c}_p \int_{T_{ref}}^T dT \right] \\
 &= \rho u \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} + \rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \quad (34)
 \end{aligned}$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

Com manipulação do termo  $\frac{dh}{dx}$  como feito na eq. (34), tem-se

$$\textcircled{B}: \frac{d}{dx} \left( \rho D \frac{dh}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[ \rho D \left( \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} + \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) \right] \quad (35)$$

Substituindo as equações (34) e (35) na eq.(33), tem-se:

$$\underbrace{\rho u \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} + \rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx}}_{\textcircled{C}} = \frac{d}{dx} \left[ \rho D \left( \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} + \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) \right] - \dot{W}''' \quad (36)$$

novamente usando a simplificação de que a entalpia de formação da espécie seja um valor constante, o termo  $\textcircled{C}$  pode ser reescrito na forma:

$$\textcircled{C}: \rho u \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} = \rho u \frac{d}{dx} \sum_i h_{f,i}^o Y_i \quad (37)$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

usando a equação da continuidade, eq.(7), torna-se:

$$\textcircled{C}: \rho u \frac{d}{dx} \sum_i h_{f,i}^o Y_i = \frac{d}{dx} \left( \rho u \sum_i h_{f,i}^o Y_i \right) \quad (38)$$

então a eq.(36) torna-se:

$$\frac{d}{dx} \left( \rho u \sum_i h_{f,i}^o Y_i \right) + \rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \rho D \left( \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} + \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) \right] - \dot{W}''' \quad (39)$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

reagrupando-se os termos:

$$\rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \rho D \sum_i h_{f,i}^o \frac{dY_i}{dx} - \rho u \sum_i h_{f,i}^o Y_i \right) - \dot{W}''' \quad (40)$$

ou

$$\rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[ \sum_i h_{f,i}^o \left( \rho D \frac{dY_i}{dx} - \rho u Y_i \right) \right] - \dot{W}''' \quad (41)$$

ou ainda

$$\rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right) = \sum_i h_{f,i}^o \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \rho D \frac{dY_i}{dx} - \rho u Y_i \right)}_{=-\dot{\omega}_i, eq.(10)} - \dot{W}''' \quad (42)$$

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

então:

$$\underbrace{\rho u \bar{c}_p \frac{dT}{dx}}_1 - \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \rho D \bar{c}_p \frac{dT}{dx} \right)}_2 = - \underbrace{\sum_i h_{f,i}^o \dot{\omega}_i}_3 - \underbrace{\dot{W}'''}_4 \quad (43)$$

1. Taxa de transporte de entalpia sensível devido à advecção  
[W/m<sup>3</sup>]

2. Taxa de transporte de entalpia sensível devido à difusão  
[W/m<sup>3</sup>]

3. Taxa de produção de entalpia sensível devido às reações químicas da combustão  
[W/m<sup>3</sup>]

4. Taxa de produção/consumo de entalpia sensível por potência mecânica  
[W/m<sup>3</sup>]

# Balanço de energia - Formalismo de Shvab Zeldovich

A equação da energia de Shvab-Zeldovich na forma simbólica é:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \bar{c}_p T - \rho D \bar{c}_p \nabla T) = - \sum_i h_{f,i}^o \dot{\omega}_i - \dot{W}''' \quad (44)$$

Em coordenadas cilíndricas, desprezando-se os efeitos de difusão na direção axial, a equação da energia de Shvab-Zeldovich torna-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_x \bar{c}_p T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r \bar{c}_p T) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho D \bar{c}_p \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \sum_i h_{f,i}^o \dot{\omega}_i - \dot{W}''' \quad (45)$$