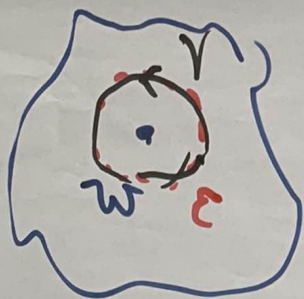


MONITORIA MAT4 10/06

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$
$$z \mapsto f(z)$$

$$\exists f'(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$
$$\forall w \in U$$

dizemos que f é holomorfa em U



$$f(w) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dz$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

$$s \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma(-n) = \infty$$

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - w)^i \quad \text{Taylor}(a)$$

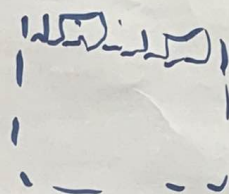
$$\Gamma(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (z - w)^i$$

$$a_{-1}(w) = \text{res}_{\Gamma}(w)$$

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

→ MEDIDA E CONTEÚDO NULOS

$A \subset \mathbb{R}^n$ limitado



Def.:(Conteúdo Nulo) Dizemos que A tem **conteúdo nulo** se $\forall \epsilon > 0$ existem intervalos n -dimensionais $I_1, \dots, I_m$ (uma q.t.d. finita deles) t.q. $A \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$

finito deles) t.q. $A \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$

$$\text{e } \sum_{j=1}^m \text{vol}(I_j) < \epsilon$$

$$\text{vol}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Def. (Medida Nula) Dizemos que A tem medida nula se $\forall \varepsilon > 0$, existe uma **seqüência (infinita)** de intervalos n -dimensionais $(I_j)_{j=1}^{\infty}$ t.q.

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) < \varepsilon$$

$$c(A) = \inf \left\{ \sum_j \text{vol}(I_j) \mid A \subset \bigcup_j I_j \right\}$$

$\bigcup_j I_j$ é uma cobertura **finita** de A por intervalos

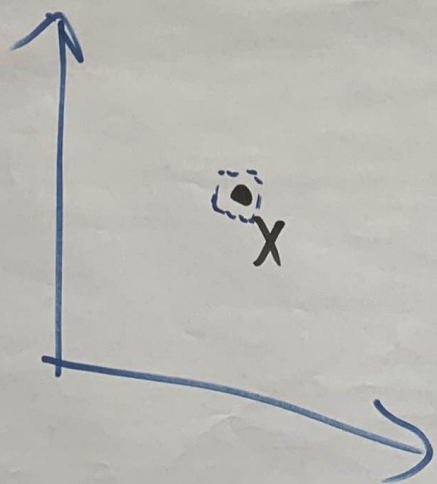
$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) \mid \right.$$

$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ é uma cobertura de A por
uma sequência infinita de intervalos

$c(A)$ é chamado de conteúdo de A

$m(A)$ é chamado de medida $*$ de A

$\mathbb{R}^n$



$$A = \{x\}$$

$$c(A) = 0$$

ε

$A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j$

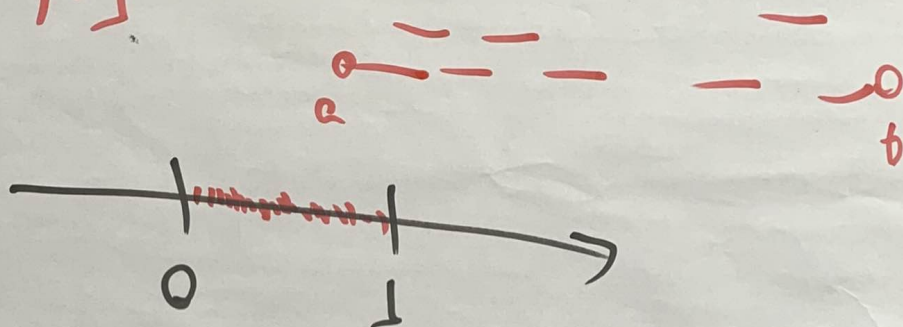
$$\sum_{j=0}^{\infty} \text{vol}(I_j) = \text{vol}(I_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j)$$

$$= \text{vol}(I_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{vol}(I_0)}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ Se A tem conteúdo nulo, então A tem medida nula
 $\rightarrow m(A) \leq c(A)$ (se $X, Y \in \mathbb{R}$
 $X < Y$ e $\exists \inf Y \Rightarrow \exists \inf X \geq \inf Y$)

$$n=1$$

$$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

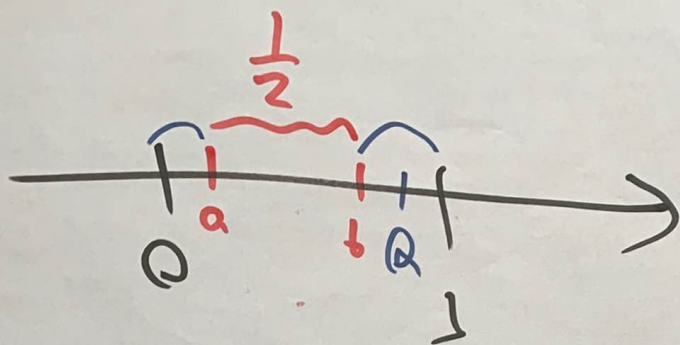


Seja $I_1, \dots, I_N$ uma coleção finita de intervalos t.q.

$$\sum_{j=1}^N \text{vol}(I_j) < \frac{1}{2}$$

$$a = \inf \left\{ \bigcup_{j=1}^N I_j \right\}, \quad b = \sup \left\{ \bigcup_{j=1}^N I_j \right\}$$

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N I_j \Rightarrow b - a \leq \sum_{j=1}^N \text{vol}(I_j) < \frac{1}{2}$$



Conclusão: A não tem conteúdo nulo

Cenas dos Próximos Capítulos:

- 1) A tem medida nula
- 2) Propriedades de conjuntos de conteúdo e medida nula
- 3) Mais exemplos
- 4) Discutir o Teorema de Integrabilidade de

4) Discutir o Teorema de Integrabilidade de Lebesgue.

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ com} \end{cases}$$

f é integrável, $\int f = 0$ e $\text{mdc}(p,q)=1$

$$D(f) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$
