Exercícios da Lista 3

(1) Verificar se cada conjunto J é ideal de $\mathbb{Z}$. Em caso afirmativo, determinar $m \geq 0$ tal que $J = m\mathbb{Z}$.

(a) $J = \{n \in \mathbb{Z} \mid 64 \mid n^a$ par algum $a \geq 1\}$

Note que $J \neq \{0\}$ e $2 \in J$.

$0 \in J$, pois $64 \mid 0$

$2 \in J$ pois $64 \mid 2^6$.

Mais ainda, se n é par, isto é, $n = 2k$

$\Rightarrow 64 \mid n^6$.

Assim, $2\mathbb{Z} \subset J$.

Por outro lado, se $n \in J \Rightarrow 64 \mid n^a \Rightarrow n^a$ é par

$\Rightarrow n$ é par. Logo $J \subset 2\mathbb{Z}$.

Assim, $J = 2\mathbb{Z}$ é ideal.

(b) $J = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \mid 24\}$ NÃO é ideal! $0 \notin J$

(c) $J = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6 \mid n \text{ e } 24 \mid n^2\}$

Seja $n \in J$. Então, de $6 \mid n$, temos que $n = 6k$.
$24 \mid n^2 \Rightarrow n^2 = 24\ell$. Logo $36k^2 = 24\ell$ e isso implica que $3k^2 = 2\ell$. Logo k é par.
Podemos escrever $k = 2m$ e então $n = 12m$.
Temos daí que $J \subset 12\mathbb{Z}$.

Por outro lado, se $x \in 12\mathbb{Z}$, temos que $6 \mid x$ e $24 \mid x^2$.
Daí $12\mathbb{Z} \subset J$.

Assim $J = 12\mathbb{Z}$ que é ideal.

(d) Análogo ao (c).

(2) (d) FALSO

Pegue $a = 5$, $b = 2$ e $c = 3$

$\text{mdc}(5, 2+3) = 5 \quad \text{mdc}(5,b) + \text{mdc}(5,c) = 2$

(8) FALSO

$a = 2 \quad b = 4 \quad c = 6$

$\text{mdc}(2, 24) = 2 \quad \text{mdc}\underbrace{(a,b)}_{2}\ \text{mdc}\underbrace{(a,c)}_{2} = 4$

(i) FALSO $\quad 2 = \underbrace{1}_{r} \times 7 + \underbrace{(-1)}_{s} \times 5$, mas $\text{mdc}(7,5) = 1$.

(j) VERDADEIRO $\quad$ Se $1 = ra + sb$ e se $d|a$ e $d|b \Rightarrow d|(ra+sb)$

$\Rightarrow d|1$. Logo $1 = \text{mdc}(a,b)$

4 (a) Se $a|b$ e $\text{mdc}(b,c) = 1$, então $\text{mdc}(a,c) = 1$.

$b = qa \quad \text{mdc}(b,c) = 1 \underset{\text{Bézout}}{\Longrightarrow} \exists\, r,s \in \mathbb{Z}$ tais que

$rb + sc = 1$. Logo $(rq)a + sc = 1 \underset{2(j)}{\Longrightarrow} \text{mdc}(a,c) = 1$

4 (b) Se mdc $(a,b) = 1$ então mdc $(ac, b) = $ mdc (c, b).

Vale a recíproca?

$(\Rightarrow)$

mdc $(a,b) = 1 \Rightarrow \exists\, r, s \in \mathbb{Z} \mid ra + sb = 1$

Logo $c = r(ac) + s(bc)$. $(*)$

$d_1 = $ mdc (ac, b) e $d_2 = $ mdc (c, b)

Temos que $d_2 \mid c$ e $d_2 \mid b \Rightarrow d_2 \mid ac$ e $d_2 \mid b \Rightarrow d_2 \mid d_1$.

Como $\left.\begin{array}{l} d_1 \mid ac \\ d_1 \mid b \end{array} \overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \begin{array}{l} d_1 \mid c \\ d_1 \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \mid d_2$. Logo $d_1 = d_2$.

$(\Leftarrow)$ NÃO VALE

$a = 2$, $b = 2$ e $c = 4$

$2 = $ mdc $(\underset{b}{2}, \underset{c}{4}) = $ mdc $(\underset{b}{2}, \underset{ac}{8})$

e mdc $(a,b) = 2 \neq 1$

(c) $mdc(a,c) = 1 = mdc(b,c) \iff mdc(ab,c) = 1$.

($\Rightarrow$) $mdc(a,c) = 1 \underset{(b)}{\Rightarrow} mdc(ab,c) = mdc(b,c) = 1$

$\hookrightarrow$ por hipótese.

($\Leftarrow$) $mdc(ab,c) = 1 \Rightarrow \exists\, r,s \in \mathbb{Z}$ com $r(ab) + sc = 1$.

Logo $\underbrace{(ra)}_{r'}b + sc = 1 = \underbrace{(rb)}_{r''}a + sc = 1 \Rightarrow mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1$.

(d) $mdc(a,b) = 1 \iff mdc(a^n, b^n) = 1 \quad \forall\, n \geq 1$.

($\Leftarrow$) Se $mdc(a^n, b^n) = 1 \Rightarrow \exists\, r,s \in \mathbb{Z}$ com

$ra^n + sb^n = 1 \Rightarrow (ra^{n-1})a + (sb^{n-1})b = 1 \Rightarrow mdc(a,b) = 1$.

($\Rightarrow$) Solução usando o item (c)

Por indução em n.

$n = 1$ ✓

Suponha $k \geq 1$ e que o resultado é verdadeiro para k. Mostrar que vale para $k+1$.

HI: $mdc(a^{k+1}, b^k) = 1$. Mostrar que $mdc(a^{k+1}, b^{k+1}) = 1$

De Bézout temos que $\exists\ r, s$ tais que

$$1 = ra^k + sb^k = (ra^{k-1})a + sb^k = ra^k + (sb^{k-1})b$$

Logo $\text{mdc}(a, b^k) = \text{mdc}(a^k, b) = 1$

Como $\left.\begin{array}{l} \text{mdc}(a^k, b^k) = 1 \\ \text{mdc}(a, b^k) = 1 \end{array}\right\} \underset{(c)}{\Longrightarrow} \text{mdc}(a^{k+1}, b^k) = 1$

$$\Rightarrow \exists\ x, y \text{ tq } xa^{k+1} + yb^k = 1 = xa^{k+1} + (yb^{k-1})b$$

$\Rightarrow \text{mdc}(a^{k+1}, b) = 1$ Logo $\left.\begin{array}{l} \text{mdc}(a^{k+1}, b^k) = 1 \\ \text{mdc}(a^{k+1}, b) = 1 \end{array}\right\} \underset{(c)}{\Longrightarrow}$

$\text{mdc}(a^{k+1}, b^{k+1}) = 1$.

Pelo PIC, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

OUTRA DEMONSTRAÇÃO USANDO O TFA.

Suponha $\text{mdc}(a,b) = 1$. Mostrar que $\text{mdc}(a^k, b^k) = 1$.

Suponha por absurdo que $\text{mdc}(a^k, b^k) = d > 1$.

$\exists\ p$ primo tal que $p \mid d$. Então $\left.\begin{array}{l} p \mid a^k \Rightarrow p \mid a \\ p \mid b^k \Rightarrow p \mid b \end{array}\right\}$

absurdo pois $\text{mdc}(a,b) = 1$.

HIPÓTESE: $\text{mdc}(a,b)=1$

5: (a) $\text{mdc}(a+b, a-b) = 1$ ou 2.

Temos que $a+b = a-b+2b$ e então, pelo Ex. 3,

$\text{mdc}(a+b, a-b) = \text{mdc}(a-b, 2b)$.

Como $\text{mdc}(a,b)=1$, $\exists\ r,s \in \mathbb{Z} \mid ra+sb=1$.

Logo $r(a-b)+(r+s)b = 1$. Multiplicando por 2

temos $2r(a-b)+(r+s)2b = 2$.

Seja então d tal que $d \mid a-b$ e $d \mid 2b$.

Então $d \mid 2 \Rightarrow d=1$ ou $d=2$.

(b) $\text{mdc}(a+b, a^2-ab+b^2) = 1$ ou 3

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$a^2-ab+b^2 = (a+b)^2-3ab = (a+b)\underbrace{(a+b)}_{q} + \underbrace{(-3ab)}_{r}$

Logo pelo Ex. 3, $\text{mdc}(a+b, a^2-ab+b^2)$

$= \text{mdc}(a+b, -3ab) = \text{mdc}(a+b, 3ab)$

Mas $mdc(a,b) = 1 \Rightarrow mdc(\underbrace{a+b}_{c}, a) = mdc(\underbrace{a+b}_{c}, b) = 1$

$\Rightarrow \quad mdc(a+b, ab) = 1.$

Exercício 4 (c)

Logo, $\exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$x(a+b) + y(ab) = 1 \Rightarrow 3x(a+b) + y(3ab) = 3.$

Assim, se $d \mid a+b$ e $d \mid 3ab \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d = 1$ ou $d = 3$.

(7) Calcular, para todo $a \in \mathbb{Z}$

(a) $mmc(2a-1, 2a+1)$

$mdc(2a+1, 2a-1) = mdc(2a-1+2, 2a-1)$

$= mdc(2a-1, 2) = 1.$ Como $(2a-1)(2a+1) =$

$mmc(2a-1, 2a+1)\, mdc(2a+1, 2a-1)$ temos

que $mmc(2a-1, 2a+1) = 4a^2 - 1.$

(b) $\text{mmc}\,(na, (n+1)a) = m$

$\text{mdc}\,(na, (n+1)a) = |a|\,\text{mdc}\,(n, n+1) = |a|$

Assim $(na)(n+1)a = |a|\, m$

Logo $m = n(n+1)|a|$.

(11) Provar que $4k+3$ e $5k+4$ são relativamente primos qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$.

$5k+4 = 4k+3 + (k+1)$

$\text{mdc}\,(5k+4, 4k+3) = \text{mdc}\,(4k+3, k+1)$

$4k+3 = 4(k+1) - 1$

$\text{mdc}\,(4k+3, k+1) = \text{mdc}\,(k+1, -1) = \underline{1}$.

12 $\text{mdc}(19, 17) = 1$

	1	8
19	17	2
2	1	

$2 = 19 - 17$

$1 = 17 - 8 \times 2 = 17 - (19 - 17) \times 8$

$= 9 \times 17 - 8 \times 19$

Assim $5 = 45 \times 17 - 40 \times 19$

13 : Mostrar que $\text{mdc}(a, a^2 + na + b) \mid b$ quaisquer que sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

$\text{mdc}(a, a^2 + na + b) = \text{mdc}(a, a(a+n) + b) = \text{mdc}(a, b) \mid b$.

Lista 2

20. Nenhum quadrado perfeito é da forma $4k+2$ ou $4k+3$.

Se $a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2$

$a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$.

21. O algarismo das unidades de um quadrado perfeito só pode ser 0, 1, 4, 6, 5, 9.

$a = 10q + r \Rightarrow$ r é o algarismo das unidades de a, $0 \leq r < 9$.

$a^2 = 10^2 q^2 + 20qr + r^2$

$= 10\underbrace{(10q^2 + 2qr)}_{Q} + r^2$

$r = 0$ ✓ $\quad a^2 = 10^2 q^2$

$r = 1 \quad a^2 = 10Q + 1$

$r = 2 \quad a^2 = 10Q + 4$

$r = 3 \quad a^2 = 10Q + 9$

$r = 4 \quad a^2 = 10Q + 16 = 10(Q+1) + 6$

$r = 5 \quad a^2 = 10Q + 25 = 10(Q+2) + 5$

$r = 6 \quad a^2 = 10Q + 36 = 10(Q+3) + 6$

$r = 7 \quad a^2 = 10Q + 49 = 10(Q+4) + 9$

$r = 8 \quad a^2 = 10Q + 64 = 10(Q+6) + 4$

$r = 9 \quad a^2 = 10Q + 81 = 10(Q+8) + 1$

22. $11\ldots1 =$

$10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2 + 10 + 1 = 100Q + 11 = 4(25Q + 2) + 3$

Assim qualquer elemento dessa sequência é da forma $4k+3$ e não é quadrado perfeito.

23. Na sequência aa, aaa, aaaa, ... para $2 \leq a \leq 9$ nenhum número é um quadrado perfeito.

Se $a = 2, 3, 7, 8$, o algarismo das unidades é um desses e pelo exercício 21. não é um quadrado perfeito.

$a = 4$ $\quad 44\ldots4 = 4\times10^n + 4\times10^{n-1} + \cdots + 4\times10^2 + 44$

$= 4\times100Q + 44 = 4\times(100Q + 11)$.

Se $\exists\, b$ tal que $a = b^2$, então b é par.

Logo $b = 2k \Rightarrow \cancel{4}(100Q + 11) = \cancel{4}k^2$

$\Rightarrow 100Q + 11 = k^2$, absurdo pelo exercício 20

$a = 9$ $\quad 99\ldots9 = 9\times(100Q + 11) = b^2$. Logo $b = 3k$.

$9\times(100Q + 11) = 9k^2 \Rightarrow 100Q + 11$ é quadrado perfeito, contra o exercício 20.

$a = 5$ $\quad 5\ldots5 = 100Q + 55 = 100Q + 52 + 3$

$= 4(25Q + 13) + 3$ é da forma $4k+3$

$a = 6$ $\quad 6\ldots6 = 100Q + 66 = 100Q + 64 + 2$

$= 4(25Q + 16) + 2$

é da forma $4k+2$.

(18) Existem infinitos valores de n tais que $8n^2+5$ é divisível por 7 e por 11.

(1) Escreva $n = 7q + r$, $0 \leq r < 7$

$8n^2+5$ é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ n^2+5 é divisível por 7

$\Leftrightarrow$ $n^2 = 7Q + r^2$

n^2+5 é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ $r^2 = 7k+2$

Isso dá certo quando $r = 3$ e $r = 4$ (Testando)

$n = 7q+3$ ou $n = 7q+4$

(2) Agora escreva $n = 11x + r$ $\quad 0 \leq r < 11$.

$n^2 = 11^2x^2 + 22xr + r^2 = 11A + r^2$

$8(n^2 + 5$ é divisível por 11 $\Leftrightarrow$ $8r^2+5$ é divisível por 11.

Note que se $r = 3$, $8 \times 9 + 5 = 77$.

Assim, se $n = 77m + 3$, $8n^2+5$ é divisível por 77, qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$.

Lista 1

27:

$1 = 1^3$

$3+5 = 2^3$

$7+9+11 = 3^3$

$13+15+17+19 = 4^3$

$- - - - - - - -$

$$n(n-1)+1 + n(n-1)+3 + \cdots + n(n-1) + 2(n-1)+1 = n^3$$

$$n^3 = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1)}_{n + \sum_{j=0}^{n-1} 2j} + n^2(n-1)$$

$$n + \sum_{j=0}^{n-1} 2j + n^2(n-1)$$

$$= n + 2\frac{(n-1)n}{2} + n^3 - n^2$$

$$= n + n^2 - n + n^3 - n^2$$

Só tem que provar por induçãos

$$\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) = \frac{(n-1)n}{2}$$