EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Problemas :

(1) Pagar R$ 510,00 usando cédulas de 50 reais e de 20 reais.

(2) Determine o menor inteiro positivo que tem restos 11 e 35 quando dividido, respectivamente, por 37 e 48.

(3) Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

(4) Dada uma reta $ax + by = c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, quais (se é que existem) são os pontos com coordenadas inteiras dessa reta?

Resolver $aX + bY = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Equação Diofantina Linear em homenagem a Diofanto de Alexandria (300 dC). Segundo o livro do Polcino, seria mais justo associar essas equações a Fermat que foi o primeiro a estudar esse problema estritamente no conjunto dos números inteiros (1657).

$\boxed{\text{Quando a equação } aX + bY = c \text{ tem solução? (em } \mathbb{Z})}$

Proposição: Existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ com $ax_0 + by_0 = c$ se, e somente se, $d = mdc(a, b) \mid c$.

Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja $d = mdc(a, b)$. Então $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ e $mdc(a_1, b_1) = 1$.

Como existem x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$, temos que $d(a_1 x_0 + b_1 y_0) = c$, logo $d \mid c$.

($\Leftarrow$) Suponha que $d \mid c$. Então $c = d c_1$.

A equação $aX + bY = c$ é equivalente então a $a_1 X + b_1 Y = c_1$, e $mdc(a_1, b_1) = 1$.

Pelo Teorema de Bèzout, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $a_1 r + b_1 s = 1$. Assim,

$$c_1 = a_1 (\underbrace{r c_1}_{x_0}) + b_1 (\underbrace{s c_1}_{y_0}) . \quad \blacksquare$$

Podemos nos restringir a equações do tipo

$$aX + bY = c \quad \text{com} \quad mdc(a, b) = 1 .$$

<u>Proposição</u>: Considere a equação $ax + by = c$ com $mdc(a, b) = 1$. Se (x_0, y_0) é uma solução, então (x, y) com $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$ é solução para todo $t \in \mathbb{Z}$. Além disso, essas são todas as soluções.

Demonstração:

(1) Mostrar que (x,y), $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$ são soluções.

$$ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 + abt - abt$$
$$= ax_0 + by_0 = c.$$

(2) Seja (x_1, y_1) outra solução de $ax + by = c$.

Então $ax_1 + by_1 = c = ax_0 + by_0$

Logo $a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$ (*) $\Longrightarrow a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0)$.

Como $mdc(a,b) = 1$, temos que $a \mid y_1 - y_0$. Logo

$y_1 - y_0 = at$. Substituindo $y - y_0$ na equação (*),

temos $a(x_1 - x_0) + bat = 0$. Assim, $x_1 - x_0 = -bt$.

$$x_1 = x_0 - bt \qquad y_1 = y_0 + at.$$

Como t é qualquer pode trocar t por $-t$

e obter que todas as soluções (INTEIRAS) são

$$x = x_0 + bt \quad \text{e} \quad y = y_0 - at.$$

(1) $50x + 20y = 510$ (*)

$mdc(50, 20) = 10$ e $10 \mid 510$

Assim (*) é equivalente a

$5x + 2y = 51.$

$mdc(5, 2) = 1.$ $\underbrace{1}.5 + \underbrace{(-2)}2 = 1$

Assim $\underbrace{51}_{x_0} \times 5 + \underbrace{(-102)}_{y_0} \times 2 = 51$

Assim as soluções são $x = 51 + 2t$, $y = -102 - 5t$, $t \in \mathbb{Z}$

Queremos as soluções positivas. Então

$51 + 2t > 0 \Rightarrow t > -\frac{51}{2}$

$-102 - 5t > 0 \Rightarrow 5t < -102 \Rightarrow t < -\frac{102}{5}$

Logo $-\frac{51}{2} < t < -\frac{102}{5}$

$-25{,}2 < t < -20{,}4$

Os valores inteiros de t nesse intervalo são

$t_1 = -21$, $t_2 = -22$, $t_3 = -23$, $t_4 = -24$ $t_5 = -25$

$(x, y) = (9, 3), (7, 8), (5, 13), (3, 18), (1, 23)$

(2) Queremos achar o menor inteiro N tal que

$$N = 37x + 11 = 48y + 35$$

Logo, temos que resolver a equação,

$$37x - 48y = 24$$

$mdc(48, 37) = 1$

	1	3	2	1	3
48	37	11	4	3	1
11	4	3	1	0	

$$1 = 4 - 3 = 37 - 3 \times 11 - (11 - 2 \times 4)$$
$$= 37 - 4 \times 11 + 2 \times (37 - 3 \times 11)$$
$$= 3 \times 37 - 10 \times (48 - 37)$$
$$= -10 \times 48 + 13 \times 37$$

$$37 \times 13 - 48 \times 10 = 1$$

Logo $37 \times (24 \times 13) - 48 \times (24 \times 10) = 24$

$x_0 = \underbrace{24 \times 13}_{312}$ e $y_0 = 240$

Assim, $x = 312 - 48t$ e $y = 240 - 37t$

$t < 6{,}5$ $\qquad$ $t < 6{,}48$

$t = 6$ $\quad x_0 = 24$ $\qquad$ $y_0 = 18$

$$N = 899 = 24 \times 37 + 11 + 48 \times 18 + 35$$

(3) x = coelhos
y = galinhas

$$4x + 2y = 400 \iff 2x + y = 200$$

Aqui, achar uma solução inicial é fácil.

Por exemplo $x_0 = 150$
$y_0 = -100$

Assim $x = 150 + t$
$y = -100 - 2t$

$x \geq 0 \quad 150 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq -150$

$y \geq 0 \quad -100 - 2t \geq 0$
$-100 \geq 2t \Rightarrow t \leq -50$

$-150 \leq t \leq -50$

Mas queremos $|x - y|$ mínimo

$|250 + 3t|$ mínimo

O mínimo é quando $|250 + 3t| = 0 \Rightarrow t = -\frac{250}{3} \notin \mathbb{Z}$

O inteiro mais próximo é -83

Quando $t = -83$ $\quad x = 150 - 83 = 67$ e $y = -100 + 166 = 66$

67 coelhos e 66 galinhas

(4) Considere a reta de equação geral

$3x + 5y = 2$.

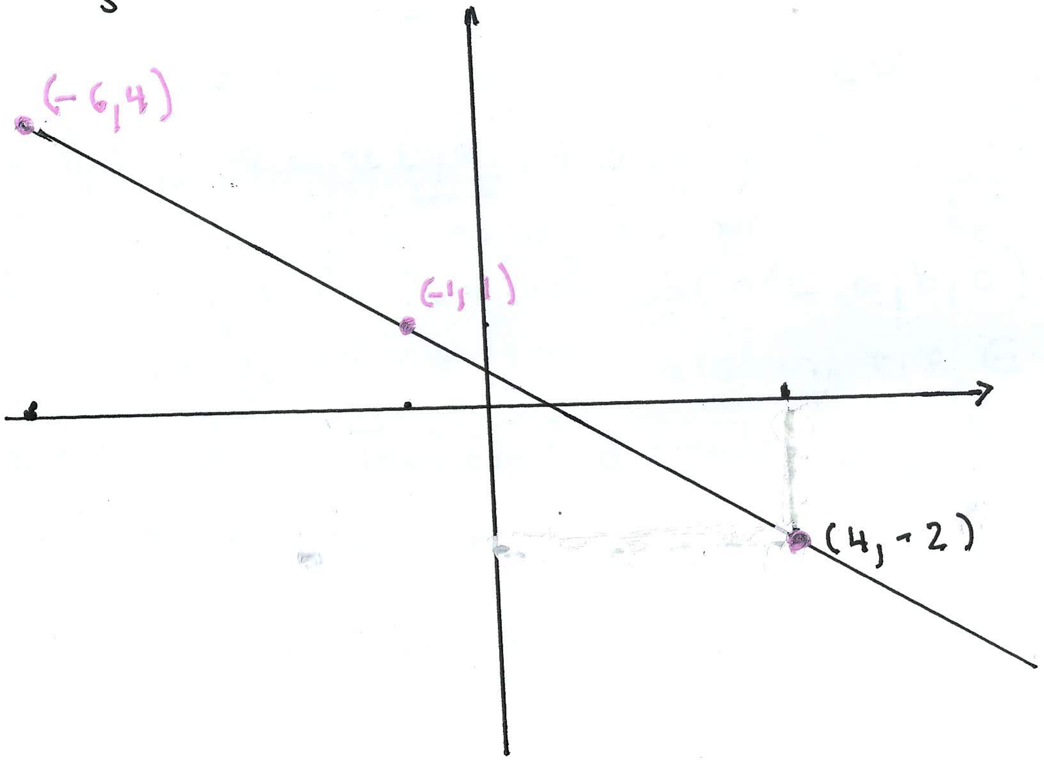
Determine os pontos da reta com coordenadas inteiras:

$mdc(3,5) = 1$, logo tem solução.

$1 = 2 \times 3 + (-1) \times 5$.

Logo $2 = 4 \times 3 + (-2) \times 5$. Assim, uma solução (x_0, y_0) é quando $x_0 = 4$ e $y_0 = -2$.

As soluções são $x = 4 + 5t$, $y = -2 - 3t$, $t \in \mathbb{Z}$.



A reta de equação $3x + 6y = 7$ não tem pontos com ambas as coordenadas inteiras.

Equações Diofantinas com 3 Variáveis

Queremos agora resolver a equação

$$aX + bY + cZ = k \quad (*)$$

A equação (*) tem solução se, e somente se, $mdc(a,b,c) \mid k$.

($\Rightarrow$) Se tem solução (x_0, y_0, z_0) então $ax_0 + by_0 + cz_0 = k$

Se $d = mdc(a,b,c)$, então $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ e $c = c_1 d$

Assim $d(a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0) = k$ e $d \mid k$.

($\Leftarrow$) Se $d = mdc(a,b,c) \mid k$

$\exists\, r, s, v$ tais que $d = ar + bs + cv$ (*)

Então $k = k_1 d$, $k = a\underbrace{(rk_1)}_{x_0} + b\underbrace{(sk_1)}_{y_0} + c\underbrace{(vk_1)}_{z_0}$

A validade de (*) segue do fato de $d = mdc(a,b,c) = mdc(mdc(a,b), c)$;

pois seja $d_1 = mdc(a,b)$. Então existem $r_1, s_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$d_1 = r_1 a + s_1 b$. Também $d = mdc(d_1, c)$ e segue que

existem u e v tais que $d = ud_1 + cv$.

Logo $d = u(r_1 a + s_1 b) + cv = \underbrace{(ur_1)}_{r}a + \underbrace{(us_1)}_{s}b + vc$.

Agora, vamos determinar a solução geral de $aX+bY+cZ=k$.

$d=mdc(a,b,c)\mid k$.

Então, (*) é equivalente a $a_1X+b_1Y+c_1Z=k_1$, com $a_1=\frac{a}{d}$, $b_1=\frac{b}{c}$, $c_1=\frac{c}{d}$ e $k_1=\frac{k}{d}$.

Seja $W=a_1X+b_1Y$. Vamos resolver primeiro a equação

$$W+c_1Z=k_1.$$ Essa equação tem solução pois $mdc(1,c_1)=1\mid k_1$.

$$1=(1-c_1)\cdot 1+1\cdot c_1 \Rightarrow k_1=(1-c_1)k_1\cdot 1+k_1c_1.$$

Assim $w_0=(1-c_1)k_1$ e $z_0=k_1$ são soluções.

A solução geral é $w=w_0+c_1t$ e $z=z_0-t$.

Querermos agora resolver

$a_1X+b_1Y=w_1$, e para isso, precisamos encontrar t_1 tal que $w_1=w_0+c_1t_1$ seja divisível por $d_1=mdc(a_1,b_1)$.

Mostrar que tal t_1 existe!

$$w_0=(1-c_1)k_1$$

$mdc(d_1,c_1)=mdc(a_1,b_1,c_1)=1$. Logo, existem $r,s\in\mathbb{Z}$

com $1=rd_1+sc_1$.

Seja $t_1 = (1-s)k_1$. Então

$$w_1 = (1-c_1)k_1 + c_1(1-s)k_1 = k_1 - c_1k_1 + c_1k_1 - sc_1k_1$$

$$= k_1 - k_1(sc_1) = k_1(1-sc_1) = k_1 r d_1.$$

Logo $d_1 \mid w_1$.

Seja (x_0, y_0) uma solução de $a_1X + b_1Y = w_1$.

Então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1(z_0 - t_1) = w_1 + c_1(z_0 - t_1)$

$$= (w_0 + c_1t_1) + c_1(z_0 - t_1) = w_0 + c_1z_0 = k_1.$$

Todas as soluções de $a_1X + b_1Y = w_1$ são

$$x = x_0 + b_1 s \qquad s \in \mathbb{Z}$$
$$y = y_0 - a_1 s$$

Assim, as soluções de $a_1X + b_1Y + c_1Z = k_1$ são

$$\begin{cases} x = x_0 + b_1 s \\ y = y_0 - a_1 s \\ z = z_0 - t_1 \end{cases}, \quad s, t_1 \in \mathbb{Z} \text{ e } t_1 \text{ tal que } mdc(a_1, b_1) \mid (1-c_1)k_1 + c_1t_1.$$

Para cada t_1 encontrado, tem-se um conjunto de soluções.

Resolver a equação:

$$100x + 72y + 90z = 6 \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mdc}(100,72) = 4 \\ \text{mdc}(4,90) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mdc}(100,72,90) = 2 \text{ e } 2 \mid 6.$$

A equação (*) é equivalente a

$$50x + 36y + 45z = 3.$$

Faça $W = 50x + 36z$ e resolva $W + 45z = 3$.

$\text{mdc}(1,45) = 1 \qquad \underbrace{1}_{r} \times 45 + \underbrace{(-44)}_{s} \times 1 = 1$

$$3 = 3 \times 45 + (-132) \times 1$$

O par (w_0, z_0), com $w_0 = -132$ e $z_0 = 3$ é solução.

E todas as soluções são

$$w = -132 + 45t \quad \text{e} \quad z = 3 - t \quad t \in \mathbb{Z}$$

Agora, vamos resolver

$$50x + 36y = w = -132 + 45t$$

$\text{mdc}(50,36) = 2$ e $2 \mid w$, qualquer que seja $t \in \mathbb{Z}$, t par.

$$50x + 36y = -132 + 45t \quad (**)$$

	1	2	1	1	3
50	36	14	8	6	2
14	8	6	2	0	

$$2 = 8 - 6 = 36 - 2\times 14 - (14 - 8)$$

$$= 36 - 3\times 14 + 36 - 2\times 14$$

$$= 2\times 36 - 5\times(50 - 36)$$

$$= \underbrace{7}_{s}\times 36 \underbrace{-5}_{x}\times 50$$

$$-5\times 50 + 7\times 36$$

$$2 = -5\times 50 + 7\times 36$$

$$-132+45t = 2\times\frac{(-132+45t)}{2} = -\frac{5\times(-132+45t)}{2} + 7\times\frac{(-132+45t)}{2}$$

Assim (x, y) com

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{132+45t}{2} + \frac{36}{2}s \\ y = -\frac{132+45t}{2} - \frac{50}{2}s \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t \text{ par} \\ s \in \mathbb{Z} \end{array}$$

soluções de $(**)$

e as soluções de $(*)$ são (x, y, z), com $z = 3 - t$