Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

# NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

## Aula 2 - Progressão Geométrica

Nesta aula, iremos apresentaremos o conceito de progressão geométrica.

**Definição 1:** Sejam a e q dois números reais não nulos. Chama-se Progressão Geométrica (P.G.) à sequência ($a_n$) tal que:

$$\begin{cases} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= a_n \cdot q \,,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \,. \end{cases}$$

onde $a_n$ é um número real qualquer com i ∈ N*.

Portanto,

$$(a_n) = (a \,,\ aq \,,\ aq^2 \,,\ aq^3 \,,\ \cdots)$$

# Observação:

Segue da Definição 1 que, se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, então

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Assim,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

**Exemplo 1:**

A P.G $(a_n) = (2 , 6 , 18 , \cdots)$ tem como primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$

**Exemplo 2:**

$(a_n) = (2 , 10 , 50 , \cdots)$ temos que $a_1 = 2$ ; $q = 5$

**Exemplo 3:**

$(a_n) = - 3 , - 3/2 , - 3/4 , \cdots$ temos que $a_1 = -3$ ; $q = 1/2$

## Classificação das Progressões Geométricas

Se $(a_n)$ é uma P.G. então:

- $(a_n)$ é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. As condições para a P.G. ser estritamente crescente são: $\begin{cases} a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q > 1 \\ \qquad \text{ou} \\ a_1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1 \end{cases}$

- $(a_n)$ é estritamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. As condições para uma P.G. ser decrescente são: $\begin{cases} a_1 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1 \\ \qquad \text{ou} \\ a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q > 1 \end{cases}$

# Classificação das Progressões Geométricas

Exemplos de progressões geométricas crescentes e decrescentes:

**Exemplo 1:**

$(a_n) = (2 , 10 , 50 , \cdots )$ temos que $a_1 = 2$ ; $q = 5$

**Exemplo 2:**

$(a_n) = - 3 , - 3/2 , - 3/4 , \cdots$ temos que $a_1 = -3$ ; $q = 1/2$

## Termo Geral de uma P.G.

Sabemos que, pela definição, $(a_n) = (a , aq , aq^2 , \cdots )$. Daí,

$$a_n = a_1 q^{n-1} .$$

A expressão acima é denominada termo geral de uma P.G.

## Termo Geral de uma P.G.

Em cada item a seguir, dada a P.G., determinemos sua razão e sua classificação:

a) $(a_n) = (1\,,\,4\,,\,16\,,\,64\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{4}{1} = 4$, logo a P.G. é estritamente crescente.

b) $(a_n) = (-27\,,\,-9\,,\,-3\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-9}{-27} = \dfrac{1}{3}$, logo a P.G. é estritamente crescente.

c) $(a_n)$ tal que $\begin{cases} a_1 & = & 18 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{3}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Observe que $a_2 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$ e $a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$. Daí, $(a_n) = (18\,,\,6\,,\,9\,,\,\cdots)$. Então temos que $q = \frac{1}{3}$, logo a P.G é estritamente decrescente.

$(a_n) = (1\,,\,4\,,\,16\,,\,64\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{4}{1} = 4$, logo a P.G. é estritamente crescente.

$(a_n) = (-27\,,\,-9\,,\,-3\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-9}{-27} = \dfrac{1}{3}$, logo a P.G. é estritamente crescente.

$(a_n)$ tal que $\begin{cases} a_1 & = & 18 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Observe que $a_2 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$ e $a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$. Daí, $(a_n) = (18\,,\,6\,,\,9\,,\,\cdots)$. Então temos que $q = \frac{1}{3}$, logo a P.G é estritamente decrescente.

$(a_n) = (-1\,,\,-3\,,\,-9\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-3}{-1} = 3$, logo, a P.G. é estritamente decrescente.

$$(a_n) = (-2\,,\ -2\,,\ -2\,,\ \cdots),\ q = \frac{-2}{-2} = 1, \text{ logo a P.G. é constante.}$$

$$(a_n) = (-2\,,\ -2\,,\ -2\,,\ \cdots),\ q = \frac{-2}{-2} = 1, \text{ logo a P.G. é constante.}$$

# Soma dos n Primeiros Termos de uma P.G

Se $(a_n)$ é uma P.G. de razão $q$ e $S_n$ a soma dos $n$ primeiros termos de $(a_n)$ então:

$$S_n = n \cdot a_1 \quad \text{se} \quad q = 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{se} \quad q \neq 1$$

# Soma dos n Primeiros Termos de uma P.G

Se $(a_n)$ é uma P.G. de razão $q$ e $S_n$ a soma dos $n$ primeiros termos de $(a_n)$ então:

$$S_n = n \cdot a_1 \qquad \text{se} \quad q = 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \qquad \text{se} \quad q \neq 1$$

**Exemplo 13:**

Determine a soma dos 10 primeiros termos da P.G. $(1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ \cdots)$.

*Solução:*

Temos que $q = \frac{3}{1} = 3$. Então:

$$S_{10} = \frac{a_1\left(q\ 10 - 1\right)}{q - 1} = \frac{1 \times \left(3^{10} - 1\right)}{3 - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524\,.$$

# O Limite da Soma dos Infinitos Termos de uma P.G.

Seja $(a_n)$ uma P.G. de razão $q$ tal que $-1 < q < 1$. A soma $S$ dos infinitos termos dessa P.G. existe, é finita e igual a $\lim_{n\to\infty} S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

# Exemplo:

Determine a soma dos infinitos termos da P.G. $(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{8}\,,\,\cdots)$.

*Solução:*

Como $q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, temos que $-1 < q < 1$ e podemos aplicar a equação $S = \frac{a_1}{1-q}$ para calcularmos essa soma. Logo:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP