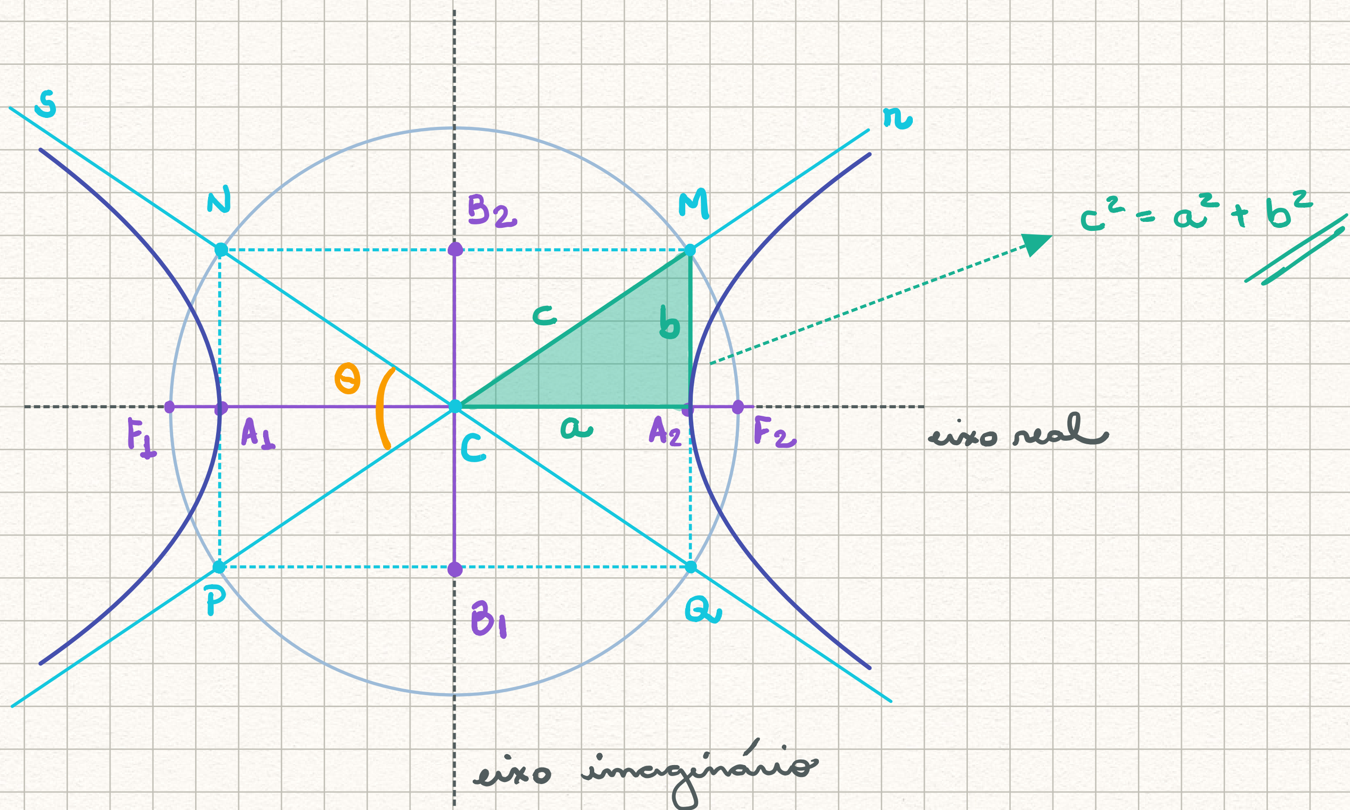
A HIPÉRBOLE

11/06/2021



r e s ... assíntotas da hipérbole

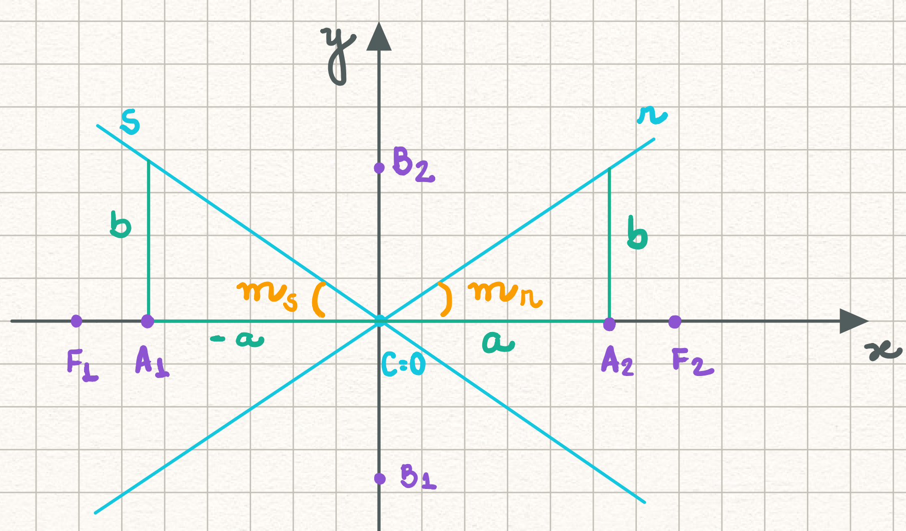
θ ... abertura da hipérbole

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ ⟶ Hipérbole Equilátera $(a = b)$

MNPQ formam um quadrado e não um retângulo!

e ... excentricidade ⟶ $e = \frac{c}{a}$; $c > a$ ∴ $e > 1$

Eqs. Assíntotas



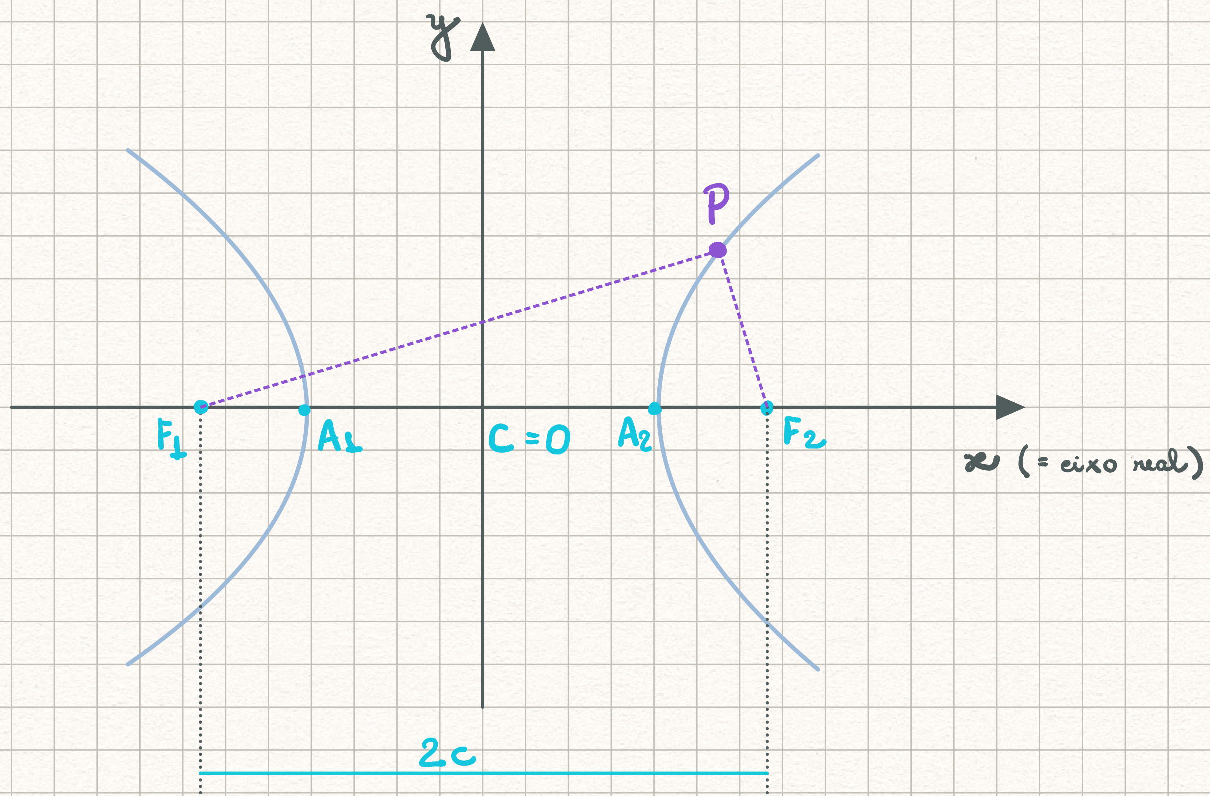
São do tipo : $y = mx$, m … declividade da reta

Assíntota r : $m_r = \frac{b}{a}$ $\therefore$ $y = \frac{b}{a}x$

Assíntota s : $m_s = \frac{b}{-a}$ $\therefore$ $y = -\frac{b}{a}x$

$\longrightarrow$ Eqs. Assíntotas : $y = \pm \frac{b}{a}x$

Equação da hipérbole cujo eixo real coincide com Ox



$P(x, y)$

$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Da definição de hipérbole :

$$|\,\delta(P, F_1) - \delta(P, F_2)\,| = 2a$$

$$\big|\,|\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}|\,\big| = 2a$$

ou $\big|\,|\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}|\,\big| = 2a$ (1)

$$\overrightarrow{F_1P} = P - F_1 = (x + c, y)$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| = \sqrt{\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_1P}} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \;//$$

$$\overrightarrow{F_2P} = P - F_2 = (x - c, y)$$

$$|\overrightarrow{F_2P}| = \sqrt{\overrightarrow{F_2P} \cdot \overrightarrow{F_2P}} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \;//$$

Substituindo os módulos em (1):

$\boxed{|K| = 8 \;\therefore\; K = \pm 8}$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (\;)^2$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + [(x-c)^2 + \cancel{y^2}]$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$$

$$\pm \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \qquad (\;)^2$$

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Sabe-se que, na hipérbole, vale a relação:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad a^2 - c^2 = -b^2$$

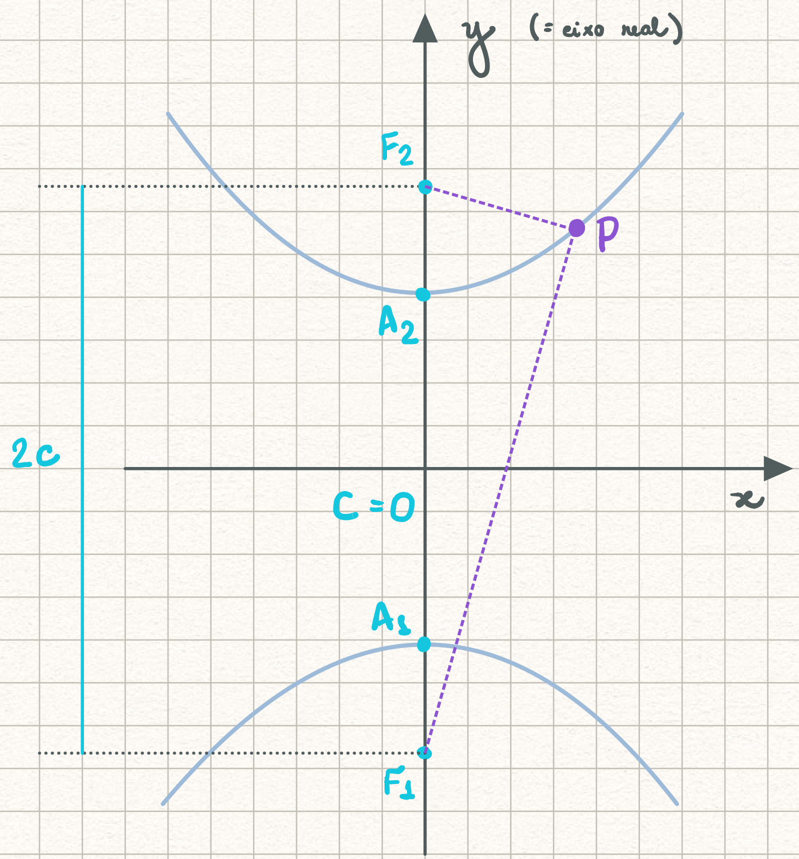
Desta forma:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \qquad : (-a^2b^2)$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eq. reduzida da hipérbole $\begin{cases} V \text{ coincide com a origem} \\ \text{eixo real sobre } Ox \end{cases}$

Eixo real sobre Oy



$$\therefore \; -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Eq. reduzida da hipérbole

$\begin{cases} \text{V coincide com a origem} \\ \text{eixo real sobre Ox} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

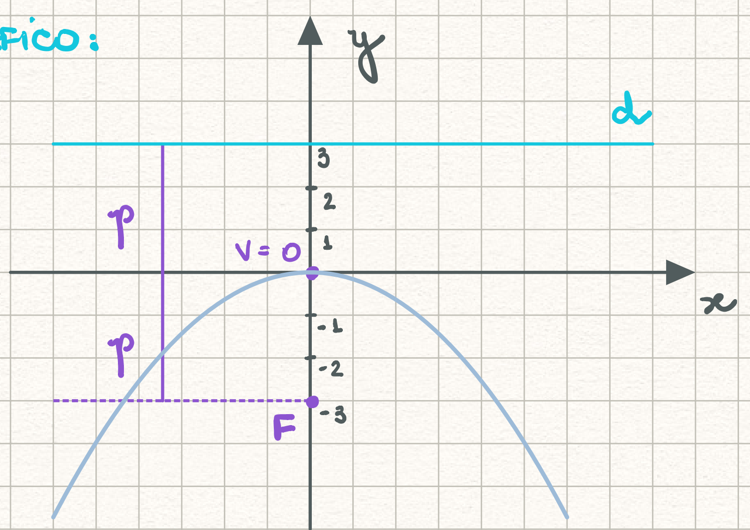
(1) Parábola $V(0,0)$
$F(0,-3)$

Gráfico
Equação ?

$V(0,0)$ ... $V=0$, então eixo de simetria sobre Ox ou Oy.

$F(0,-3)$ ... $F \in Oy$ e $F \in$ eixo de simetria, então eixo sobre Oy.

GRÁFICO:



parábola $\cap$ d $= \emptyset$

$\therefore$ concavidade $(-)$

$\downarrow$

$p < 0$ //

Eq. reduzida da parábola com eixo sobre Oy: $x^2 = 4py$

$|p| = \delta(V,F) = |\vec{VF}|$

$\vec{VF} = F - V = (-3,0)$

$|\vec{VF}| = \sqrt{\vec{VF} \cdot \vec{VF}} = \sqrt{9+0} = 3$

$|p| = 3$

$\therefore p = -3$

concavidade (-)

E a eq. da parábola será:

$$x^2 = -12y$$

2) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$ Lugar Geométrico ?

Gráfico

Reescrevendo

$9x^2 + 5y^2 = 45 \quad (:45)$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

eixo maior

→ Eq. reduzida de uma elipse $\begin{cases} C = 0 \\ \text{eixo maior sobre } Oy \end{cases}$

$a^2 = 9 \longrightarrow a = 3$: eixo maior $\longrightarrow A_1(-3,0)$, $A_2(3,0)$

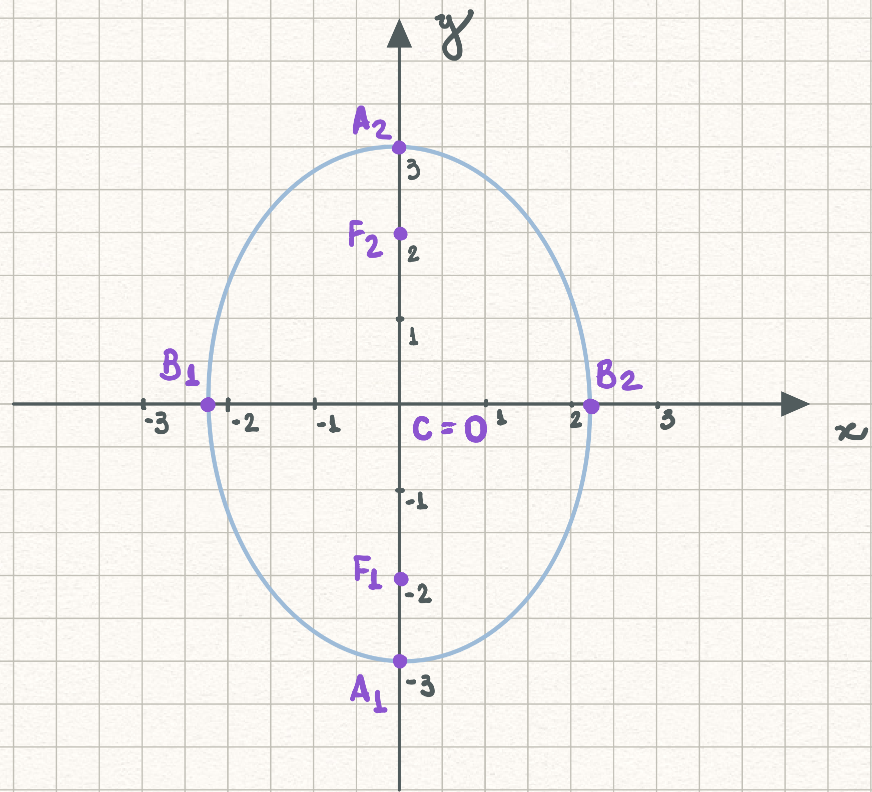
$b^2 = 5 \longrightarrow b = \sqrt{5}$: eixo menor $\longrightarrow B_1(-\sqrt{5},0)$, $B_2(\sqrt{5},0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad c^2 = 9 - 5 = 4$

$c = 2$: distância focal $\longrightarrow F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$

$e = \frac{c}{a} \longrightarrow e = \frac{2}{3}$, $0 < e < 1$ elipse

GRÁFICO:



③ $y^2 - 4x^2 = 1$

Vértices ; Focos
Excentricidade
Assíntotas
Gráfico
?

Reescrevendo

$$y^2 - \frac{x^2}{1/4} = 1$$

(+)... eixo real
(-)... eixo imaginário

→ Eq. reduzida de uma hipérbole

C = 0
eixo real sobre Oy

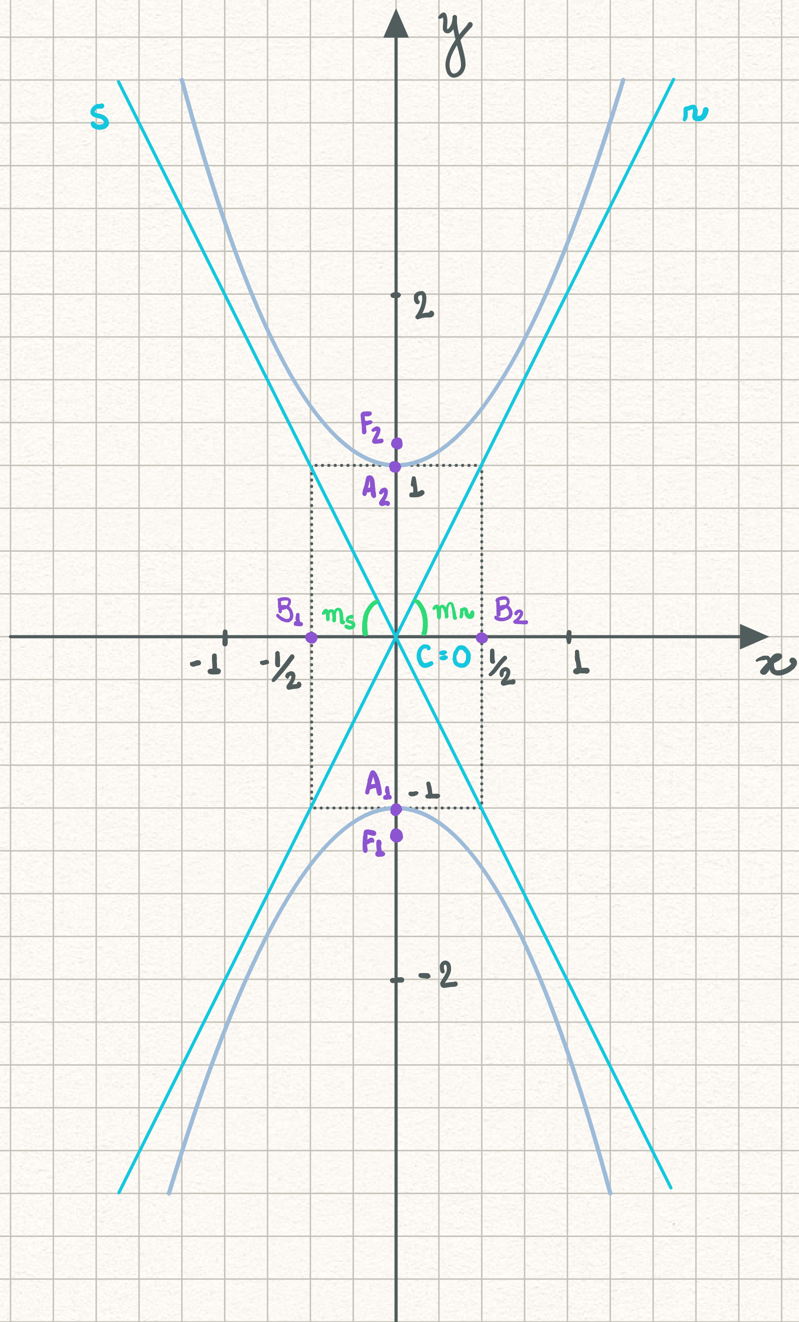
$a^2 = 1 \longrightarrow a = 1$: eixo real $\longrightarrow$ $A_1(0,-1)$, $A_2(0,1)$

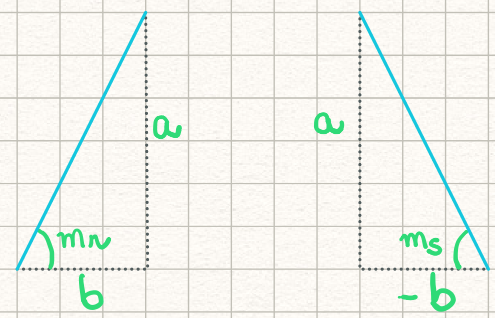
$b^2 = 1/4 \longrightarrow b = 1/2$: eixo imaginário $\longrightarrow$ $B_1(-1/2, 0)$, $B_2(1/2, 0)$

$c^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$c = \sqrt{5}/2$: distância focal $\longrightarrow$ $F_1(-\sqrt{5}/2, 0)$, $F_2(\sqrt{5}/2, 0)$

$e = \frac{c}{a} \longrightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $e > 1$ hipérbole





$$m_r = \frac{a}{b} \qquad m_s = \frac{a}{-b}$$

Eqs. Asíntotas:

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

$$y = \pm \frac{1}{1/2} x$$

$$y = \pm 2x$$

Monitoria Gustavo:

2as : 13h - 15h
4as : 10h30 - 12h30
6as : 17h30 - 18h30

Monitoria Professora:

2as : 10h - 12h