

## • Carta de Nichols

- Eixo horizontal: fase de malha aberta ( $^{\circ}$ )
- Eixo vertical: ganho de malha aberta (dB)
- Desenha-se o gráfico da resposta em frequência de malha aberta parametrizado em  $\omega$  ( $G(j\omega)K(j\omega)$ )

- Nas intersecções desse gráfico com as curvas de nível da Carta de Nichols  $\Rightarrow$

$|T(j\omega)|$  em dB

$\angle T(j\omega)$  em  $^{\circ}$

- Ver exemplo da Apostila de Sistemas de Controle

### - NOTA

As curvas para  $M_{\pm} = \text{cte}$  são fechadas  
(para  $|T| > 0$  dB)

EXEMPLO

$$\bullet GK = \underset{\substack{|| \\ 0 \text{ dB}}}{1} \angle -90^\circ = 1 \cos(-90^\circ) + j 1 \operatorname{sen}(-90^\circ) = \\ = -j$$

$$\bullet T = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{-j}{1 - j}$$

$$\bullet |T| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$

$$\bullet \angle T = \angle \frac{-j}{1 - j} = -90^\circ - (-45^\circ) = -45^\circ$$

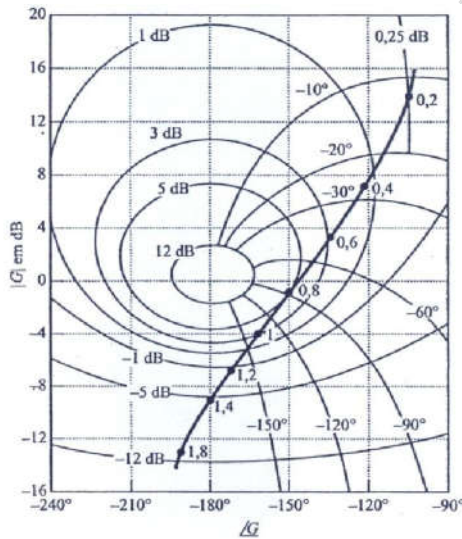
**Exemplo**

Seja o sistema em malha fechada com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Considerem-se os seguintes pontos da resposta em freqüência de **malha aberta**  $G(j\omega)$ :

| $\omega$ (rad/s) | Ganho (dB) | Fase (graus) |
|------------------|------------|--------------|
| 0,2              | 13,8       | -107,0       |
| 0,4              | 7,1        | -123,1       |
| 0,6              | 2,7        | -137,7       |
| 0,8              | -0,9       | -150,5       |
| 1,0              | -4,0       | -161,6       |
| 1,2              | -6,8       | -171,2       |
| 1,4              | -9,4       | -179,5       |
| 1,8              | -14,0      | -192,9       |



Fonte: Livro do Ogata, pg. 407, Figura 6.78-(a).

Localizando-se esses pontos na Carta de Nichols, podem-se ler de imediato os valores da resposta em freqüência de **malha fechada**  $G_{mf}(j\omega)$ :

| $\omega$ (rad/s) | Ganho (dB) | Fase (graus) |
|------------------|------------|--------------|
| 0,2              | 0,25       | -12          |
| 0,4              | 1,5        | -26          |
| 0,6              | 3,0        | -47          |
| 0,8              | 5,0        | -86          |
| 1,0              | 3,0        | -135         |
| 1,2              | -1,6       | -164         |
| 1,4              | -5,8       | -180         |
| 1,8              | -11,0      | -196         |

Observando a figura acima, também podem ser determinados por inspeção os valores das margens de estabilidade:

$$MG = 9 \text{ dB}$$

$$MF = 35^\circ$$

assim como os valores do pico e da freqüência de ressonância

$$M_r = 5 \text{ dB}$$

## • RESUMO - ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE

- Escolhe-se  $M > 0$

- Impõe-se que

$$|T_R(j\omega_i)| < M \quad \text{para } 1 \leq i \leq n_T$$

- Translada-se o template de  $G_R(j\omega_i)$  de

maneira a tangenciar em algum ponto

a curva correspondente ao valor de  $M$

- Ao longo dessa translação, registra-se

a linha descrita pelo ponto nominal, esco-

lhido na fronteira do template.

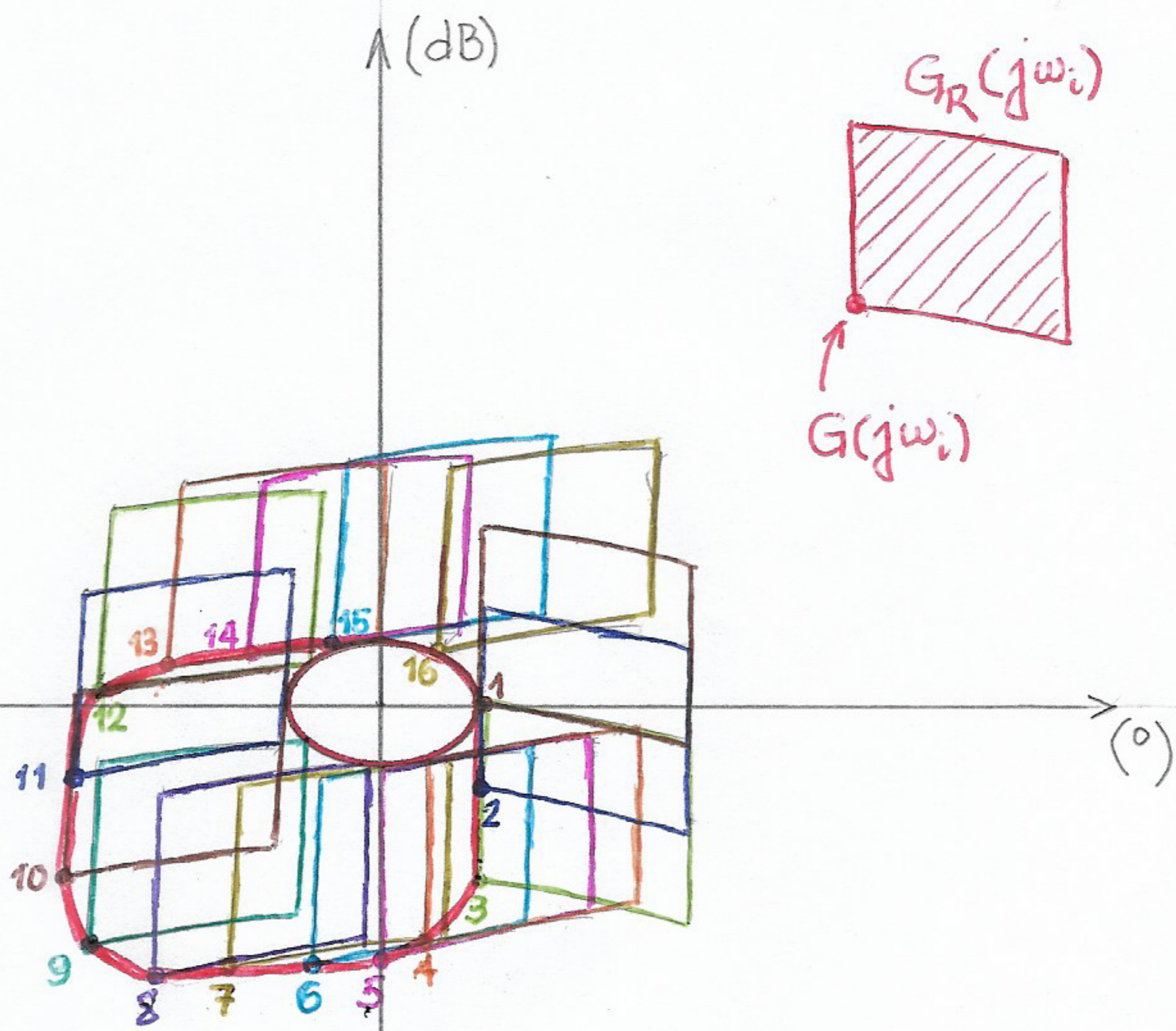
- Essa linha representa a barreira de

robustez da estabilidade para a frequên-

cia  $\omega_i$

- Portanto, se o ponto nominal está fora da

$$\text{barreira} \Rightarrow |T_R(j\omega_i)| < M$$



- A curva original ("oval") juntamente com o template  $\Rightarrow$  curva fechada "deformada".

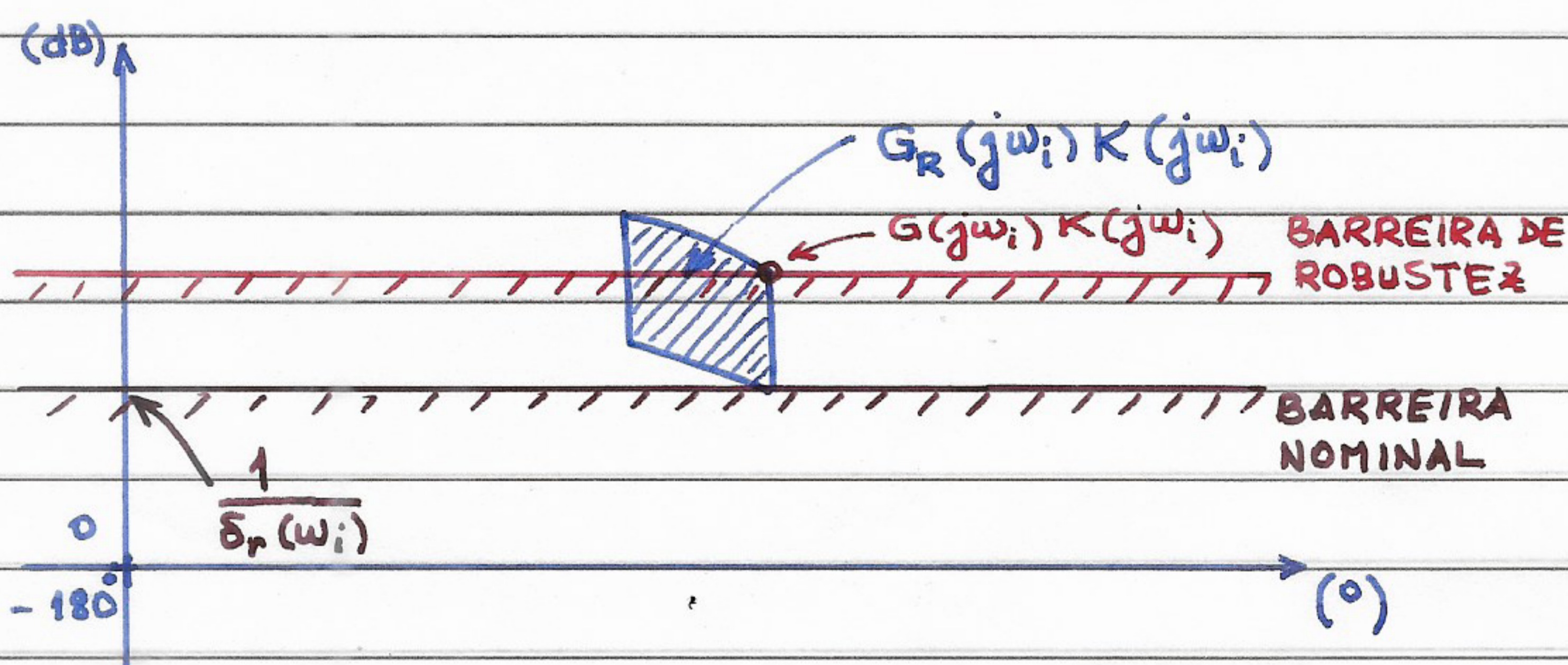
#### 6.4 - ACOMPANHAMENTO DO SINAL DE REFERÊNCIA

- Condição aproximada para  $\delta_r(\omega_i) \ll 1$ :

$$|G_R(j\omega_i)K(j\omega_i)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega_i)} \quad (\omega_i \in \Omega_r)$$

( $\forall G_R$  admissível)

- Conforme seção 5.1.2:



- O template é utilizado apenas para deslocar a barreira

- Isso deve ser feito para cada frequência

$$\omega_i, 1 \leq i \leq n_T$$

## • NOTA

- Condição não aproximada:

$$|1 + G_R(j\omega_i) K(j\omega_i)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega_i)} \quad (\omega_i \in \Omega_r)$$

( $\forall G_R$  admissível)

- Escrevendo:

$$G_R(j\omega_i) K(j\omega_i) = \rho \angle \varphi = \rho \cos \varphi + j \rho \sin \varphi$$

- Temos:

$$|1 + \rho \cos \varphi + j \rho \sin \varphi| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega_i)}$$

- Ou seja:

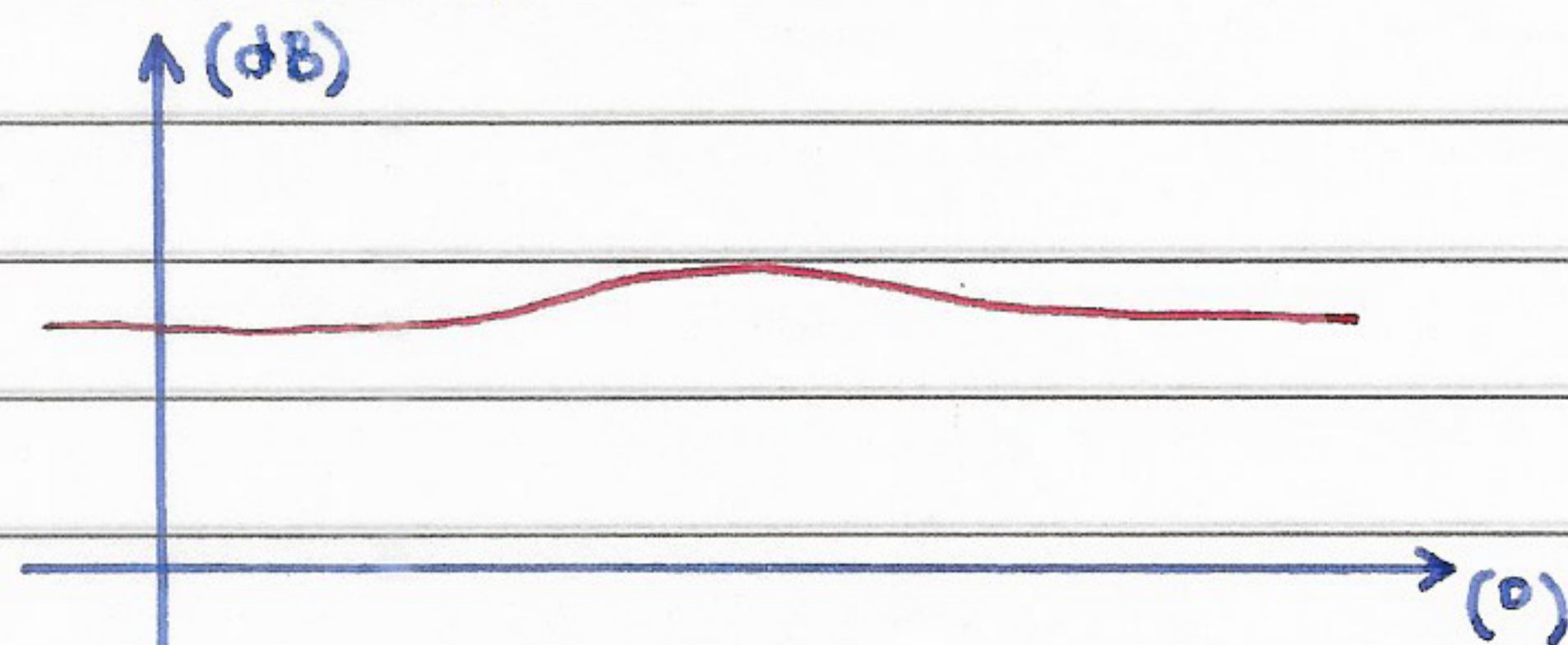
$$(1 + \rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 \geq \frac{1}{\delta_r^2(\omega_i)}$$

$$1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \geq \frac{1}{\delta_r^2(\omega_i)}$$

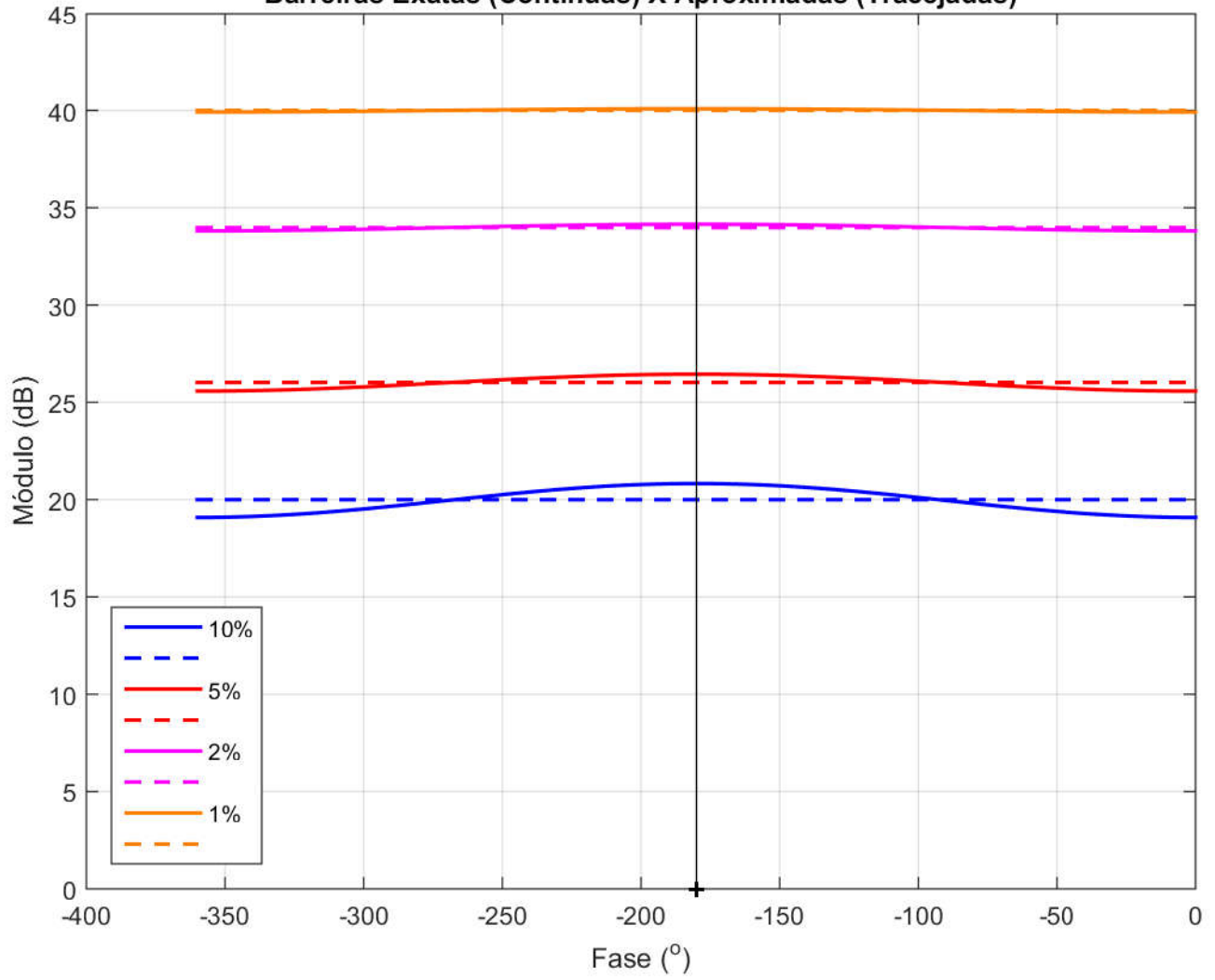
$$\therefore \boxed{\rho^2 + (2 \cos \varphi) \rho + \left(1 - \frac{1}{\delta_r^2(\omega_i)}\right) \geq 0}$$

- Assim: fixa  $\varphi \rightarrow$  calcula  $\rho$

- Variando  $\varphi$ :



Barreiras Exatas (Contínuas) X Aproximadas (Tracejadas)





```

% Construção da barreira não aproximada |1+G_R_K|\ge \frac{1}{\delta}r}
% JJC / MAI 2020

close all
clear all

deltar = [0.10 0.05 0.02 0.01];

passo_phi = 2*pi/100;
phi = -2*pi:passo_phi:0;

matriz_rho = [];

for idelta = 1:length(deltar),

    vetor_rho = [];
    aux = 1-1/deltar(idelta)^2;

    for iphi=1:length(phi),
        rho = roots([1 2*cos(phi(iphi)) aux]);
        rhomax = max(rho);
        vetor_rho = [vetor_rho rhomax];
    end

    matriz_rho = [matriz_rho; vetor_rho];

end

matriz_rho = 20*log10(matriz_rho);

cor = [0 0 1; % Azul
        1 0 0; % Vermelho
        1 0 1; % Roxo
        1 0.5 0; % Laranja
        0 1 0; % Verde
        0 1 1; % Ciano
        0 0 0]; % Preto

```

```

plot(phi*180/pi, matriz_rho(1,:), 'LineWidth', 1.5, 'Color', cor(1,:))
hold
aux = -20*log10(deltar(1));
plot([phi(1)*180/pi 0],[aux aux], 'LineStyle', '--', 'LineWidth', 1.5, 'Color', cor(1,:))

for idelta = 2:length(deltar),

    plot(phi*180/pi, matriz_rho(idelta,:), 'LineWidth', 1.5, 'Color', cor(idelta,:))
    aux = -20*log10(deltar(idelta));
    plot([phi(1)*180/pi 0],[aux aux], 'LineStyle', '--', 'LineWidth', 1.5, 'Color', cor(idelta,:))

end

plot([-180 -180],[0 45], 'LineWidth', 0.5, 'Color', cor(7,:)) % Desenha o eixo vertical na abscissa -180^o
plot([-180],[0], '+', 'LineWidth', 1.5, 'Color', cor(7,:)) % Marca o ponto crítico (-180,0)

xlabel('Fase (^o)')
ylabel('Módulo (dB)')
legend('10%', '5%', '2%', '1%', 'Location', 'SouthWest')
title('Barreiras Exatas (Contínuas) X Aproximadas (Tracejadas)')
grid

```

## 6.5 - REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

$$\bullet \quad |1 + G_R(j\omega_i)K(j\omega_i)| \geq \frac{1}{\delta_d(\omega_i)} \quad (\omega_i \in \Omega_d)$$

( $\forall G_R$  admissível)

ou, aproximadamente,

$$|G_R(j\omega_i)K(j\omega_i)| \geq \frac{1}{\delta_d(\omega_i)} \quad (\omega_i \in \Omega_d)$$

( $\forall G_R$  admissível)

sempre que  $\delta_d(\omega_i) \ll 1$

- Idêntico do caso anterior...

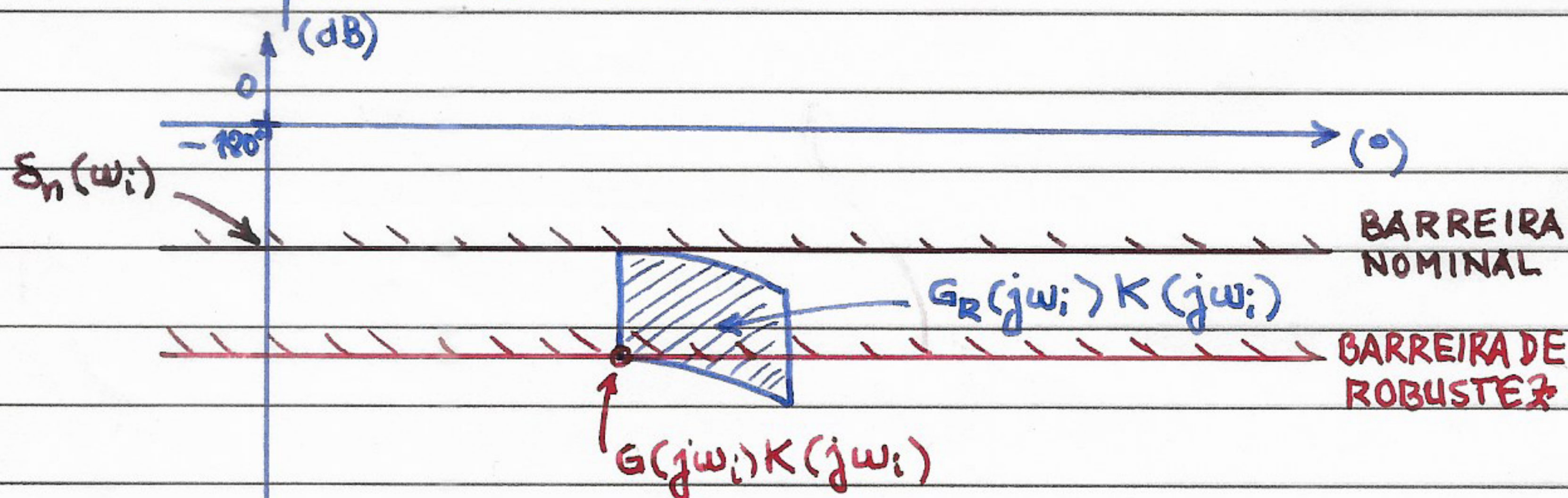
## 6.6 - REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

- Forma aproximada (cf. seção 5.3.2):

$$|G_R(j\omega_i)K(j\omega_i)| \leq \delta_n(\omega_i) \quad (\omega_i \in \Omega_n)$$

( $\forall G_R$  admissível)

- No plano de Nichols:



## 6.7 - LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE

$$\bullet \frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = \left| \frac{K(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \\ (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Em geral, por causa da rejeição do erro de medida,

$$|G_R(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \\ (\forall G_R \text{ admissível})$$

- Portanto, podemos aproximar:

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \approx |K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega), \quad (\omega \in \Omega_n)$$

que independe de  $G_R$ !

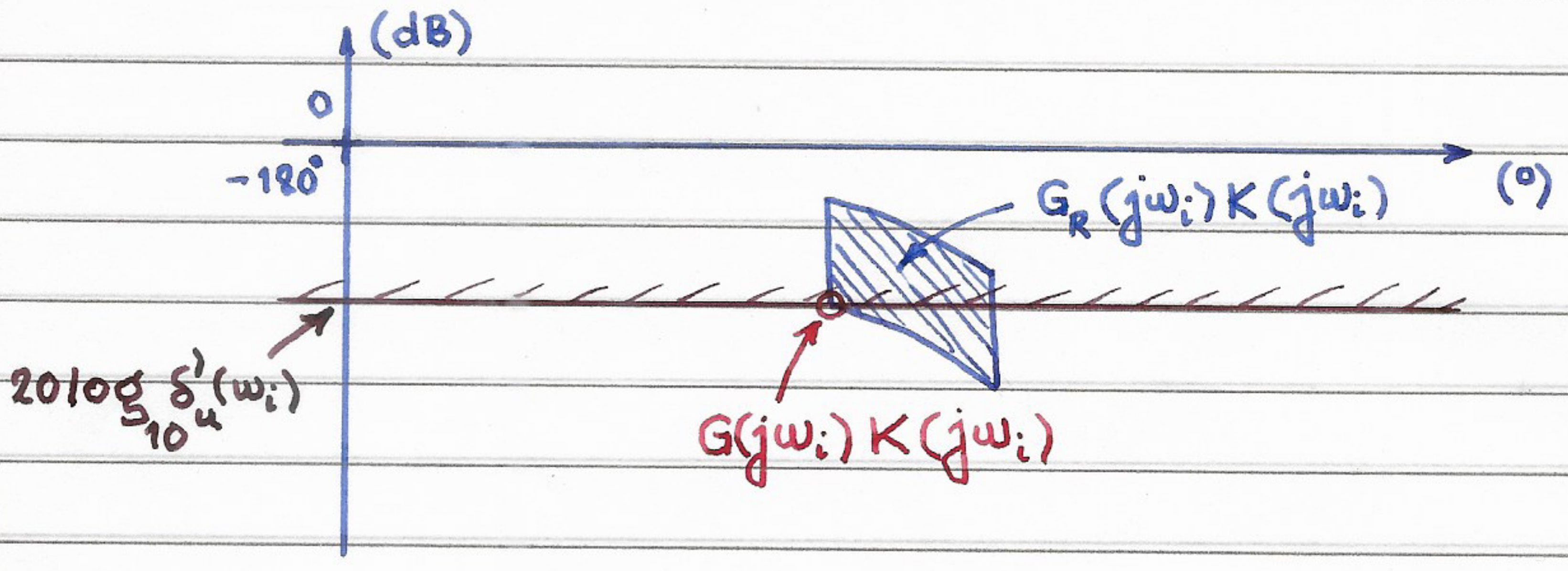
- Para exprimir a condição em termos do ganho de malha:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \underbrace{\delta_u(\omega)}_{\delta'_u(\omega)} \cdot |G(j\omega)| \quad (\omega \in \Omega_n)$$

- Para QFT, consideramos  $\omega_i, 1 \leq i \leq n_T$ :

$$\boxed{|G(j\omega_i)K(j\omega_i)| \leq \delta'_u(\omega_i)} \quad (\omega_i \in \Omega_n)$$

- No plano de Nichols:



6.7 1/2 - COMPATIBILIDADE ENTRE O PRÉ-FILTRO E A MALHA FECHADA

- $|G_R(j\omega)K(j\omega)| \geq 1 + \frac{|F(j\omega)|}{\delta_F(\omega)}$  ( $\omega \leq \omega_b$ )  
( $\forall G_R$  admissível)

- No plano de Nichols:

