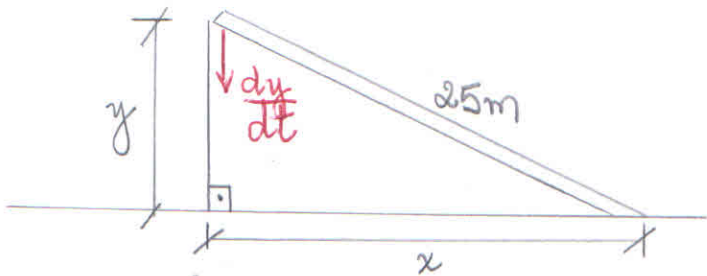


Exemplos - Taxas Relacionadas

1) Uma escada tem 25 m está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 m/s. Det. a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 20 m da parede.



$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{20 \text{ m}}$$

No triângulo retângulo a relação entre x e y é dada, aplicando-se o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = (25)^2$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dt} = -2x \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}}$$

$$\text{Como } x^2 + y^2 = 625$$

$$(20)^2 + y^2 = 625$$

$$400 + y^2 = 625$$

$$y^2 = 225$$

$$y = 15 \text{ m}$$

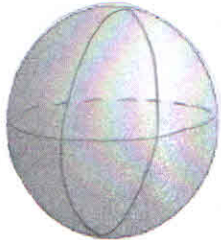
Então

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20}{15} \cdot 3$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -4 \text{ m/s}}$$

Derivação Implícita

2) Infla-se um balão esférico de tal modo que seu volume está aumentando a razão de $5 \text{ dm}^3/\text{min}$. A que razão o diâmetro do balão cresce quando o mesmo é 12 dm ?



Volume da Esfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$V = \frac{4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi d^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi d^3}{6}$$

$V = V(d(t))$ Regra da Cadeia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dd} \cdot \frac{dd}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi d^2}{2} \cdot \frac{dd}{dt}$$

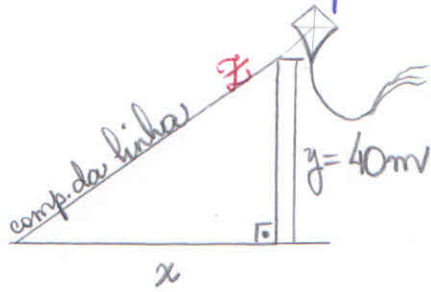
$$5 = \frac{\pi (12)^2}{2} \cdot \frac{dd}{dt}$$

$$10 = \pi \cdot 144 \cdot \frac{dd}{dt}$$

$$\frac{dd}{dt} = \frac{10}{\pi \cdot 144}$$

$$\frac{dd}{dt} = 0,021 \text{ dm/min.}$$

3) Uma pipa está voando a uma altura de 40m. Uma criança está empinando-a de tal forma que ela se mova horizontalmente a uma velocidade de 3m/s. Se a linha estiver esticada com que velocidade a linha estará sendo solta, quando o comprimento da linha desenrolada for de 50m?



Aplicando-se Pitágoras tem-se:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \quad (\div 2)$$

$$z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \quad (\div z)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{z} \frac{dy}{dt} = \text{constante}$$

$$\left\{ \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z} \frac{dx}{dt} \right\} \quad (1)$$

Retornando na equação (1) tem-se:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{30}{50} \cdot 3$$

$$\frac{dz}{dt} = 1,8 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ (50)^2 &= x^2 + (40)^2 \\ 2500 &= x^2 + 1600 \\ x^2 &= 900 \\ x &= 30 \text{ m} \end{aligned}$$

Dados do exercício:

$$y = 40 \text{ m}$$

$$x = 30 \text{ m}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}$$

$$z = 50 \text{ m}$$