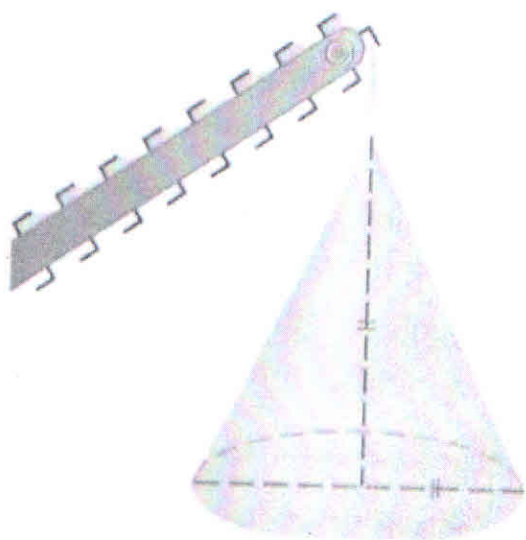


Exercícios - Taxas Relacionadas

4) Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{min}$ constituindo uma pilha na forma de um cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido a altura da pilha cresce quando está a 3 m de altura?



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{h}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot h$$

$$\frac{dV}{dt} = 3 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

$V = V(h(t)) \rightarrow$ Regra da Cadeia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

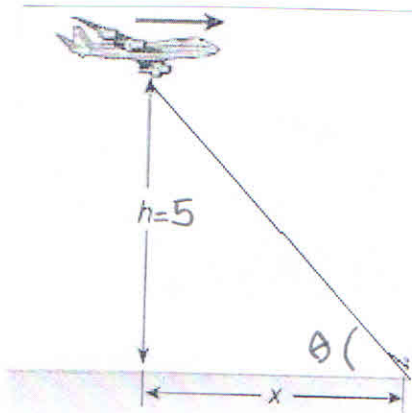
$$3 = \frac{3\pi h^2}{12} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{\pi h^2}, \quad h = 3 \text{ m}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{\pi (3)^2}$$

$$\frac{dh}{dt} \approx 0,4246 \text{ m/min}$$

5) Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for $\frac{\pi}{3}$, esse ângulo estará diminuindo a uma taxa de $\frac{\pi}{6}$ rad/min. A que velocidade o avião estará viajando naquele instante



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{x} \frac{(\operatorname{sen} \theta)}{(\cos \theta)}$$

$$x = \frac{5}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$x = 5 \cot \theta \quad d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \, du$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -5 \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad/min.}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -5 \operatorname{cosec}^2 \theta \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$x = x(\theta(t)) \rightarrow$ Regra da Cadeia

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

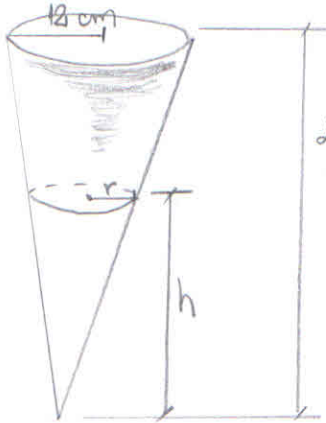
$$\frac{dx}{dt} = -5 \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5\pi}{6} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10\pi}{9} \approx 3,49 \text{ Km/min.}$$

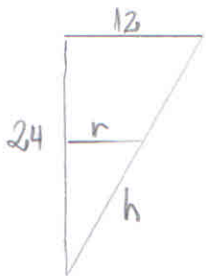
⑥ Um recipiente cheio de água com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a razão de $6 \text{ cm}^3/\text{min}$. A altura do cone é 24 cm e o raio da base é 12 cm . Encontre a rapidez com que baixa o nível da H_2O qdo está 10 cm do fundo.



Vol. do cone depende do raio e da altura. A medida que a altura varia o raio também varia.

$$\frac{dh}{dt} = ? \quad V = S_b \cdot h = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Seamos que procurar uma relação em termos de r e h :



$$\frac{24}{12} = \frac{h}{r}$$

$$2 = \frac{h}{r}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

$$\frac{dV}{dt} = 6 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

$$V = V(h(t)) \rightarrow \text{Regra da Cadeia} \quad \frac{dV}{dh} = \frac{3\pi h^2}{4}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

$$\left\{ \frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{4} \right\}$$

$$\begin{aligned} y &= g(u) & u &= f(x) \\ y &= g(f(x)) \\ y' &= g'[f(x)] \cdot f'(x) \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$6 = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$24 = \pi \cdot (10)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{24}{100\pi} \text{ cm/min}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{6}{25\pi} \text{ cm/min}$$